Ind. Manag. Persp. 2023, 13(3), 93-126; doi: 10.48308/JIMP.13.3.93

Industrial Management Perspective

Journal hompage: https://jimp.sbu.ac.ir/?lang=en

Original Article

Production Planning System with Variable Demand and Stochastic Machine Breakdown

Heibatolah Sadeghi*, Hiwa Farughi **,
Faezeh Kalevandi ***, Maryam Solgi****

Abstract

In this paper, the economic production is considered by considering defective products during production, a percentage of which can be recycled at a fixed cost, also machine failure, and variable demand. It is assumed that the products are produced at a fixed rate, but the machine may break down during production. Machine failure during production is a random variable that follows an exponential distribution with a specified parameter. If the machine breaks down during production, production stops immediately and the machine is repaired, and this study assumes that the machine repair time is a fixed value. Also, unlike the classical models, the demand for the manufactured product is expressed as a non-incremental function of time. The main goal is to determine the optimal policies for reproducing the problem in such a way that the total annual cost is minimized. For this purpose, first, a mathematical model is presented, then, the average cost per unit of time is determined, and based on the concepts of global optimization, the optimal values are determined. Finally, by solving a numerical example, the problem is analyzed. The results show that, the repair time has a great impact on the cost of the entire system, and as it increases, the system cost increases exponentially.

Keywords: Economic Production Model; Defective Products; Random Machine Failure; Variable Demand; Replenishment.

How to Cite: Sadeghi, Heibatolah; Farughi, Hiwa; Kalevandi, Faezeh; Solgi, Maryam (2023). Production Planning System with Variable Demand and Stochastic Machine Breakdown, *Ind. Manag. Persp.*, 13(3), 93-126 *(In Persian)*.

Received: May. 10, 2022; Revised: Dec. 02, 2022; Accepted: Feb. 25, 2023; Published Online: Mar. 31, 2023.

* Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran. Corresponding author. Email: h.sadeghi@uok.ac.ir

** Associate Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

*** Graduated Master, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

*** Ph.D Student, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

Copyright: © 2023 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

چشم‌انداز مدیریت صنعتی، ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۳، صص ۹۳ – ۱۲۶، doi: 10.48308/JIMP.13.3.93

چشم‌انداز مدیریت صنعتی

Journal hompage: https://jimp.sbu.ac.ir/?lang=fa

نوع مقاله: پژوهشی

برنامه‌ریزی سیستم تولید اقتصادی با درنظرگرفتن تقاضای متغیر و خرابی تصادفی ماشین

هیبت‌اله صادقی*، هیوا فاروقی، فائزه کله‌وندی***، مریم سلگی******

چکیده

در پژوهش حاضر یک مسئله تولید اقتصادی با درنظرگرفتن محصولات معیوب حین تولید و همچنین خرابی ماشین و تقاضای متغیر بررسی شده است. در این پژوهش فرض شده است که محصولات با نرخ ثابتی تولید می‌شوند؛ ولی ماشین حین تولید ممکن است دچار خرابی شود. خراب‌شدن ماشین در حین تولید، یک متغیر تصادفی است که از توزیع نمایی با پارامتر مشخص پیروی می‌کند. همچنین فرض شده است زمان تعمیر ماشین یک مقدار ثابت و مشخص است. برخلاف مدل‌های کلاسیک، تقاضا برای محصول تولیدی به‌صورت تابعی غیرافزایشی از زمان بیان شده است. هدف اصلی، تعیین سیاست‌های بهینه بازپرسازی مسئله بیان‌شده به‌گونه‌ای است که کل هزینه سالیانه حداقل شود. به این منظور ابتدا یک مدل ریاضی ارائه می‌شود؛ سپس مقدار متوسط هزینه در واحد زمان تعیین شده و بر اساس مفاهیم بهینه‌سازی سراسری، مقادیر بهینه مشخص خواهد شد. درنهایت با حل یک مثال عددی به تجزیه‌وتحلیل مسئله بیان شده پرداخته می‌شود. بر اساس نتایج، مدت‌زمان تعمیر تأثیر بسزای در هزینه کل سیستم دارد و در صورت افزایش آن هزینه‌های سیستم روند افزایشی به‌صورت نمایی خواهد داشت.

کلیدواژه‌ها: مدل تولید اقتصادی؛ محصولات معیوب؛ خرابی تصادفی ماشین؛ تقاضای متغیر؛ بازپرسازی.

استناددهی: صادقی، هیبت‌اله؛ فاروقی، هیوا؛ کله‌وندی، فائزه؛ سلگی، مریم (۱۴۰۲). برنامه‌ریزی سیستم تولید اقتصادی با درنظرگرفتن تقاضای متغیر و خرابی تصادفی ماشین. *چشم‌انداز مدیریت صنعتی*، ۱۳(۳)، ۹۳-۱۲۶.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۲۰، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۰/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۰۶، تاریخ اولین انتشار: ۱۴۰۲/۰۱/۱۱.

* استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

نویسنده مسئول: Email: h.sadeghi@uok.ac.ir

** استاد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

*** دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

**** دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

Copyright: © 2023 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

۱. مقدمه

آغاز قرن جاری با تغییرات غیرمنتظره‌ای در فضای کسب‌وکار همراه بوده است. در فضای رقابت امروزی، تنها سازمان‌هایی می‌توانند موفق شوند که بتوانند عملیات خود را به‌گونه‌ای بهینه و با کمترین هزینه هدایت کنند. یکی از مهم‌ترین مسائل عملیاتی در سازمان‌های تولیدی، برنامه‌ریزی و کنترل موجودی است. با توجه به اهمیت کنترل تولید در برنامه‌ریزی محصولات در صنعت، مدل کلاسیک کنترل موجود، مقدار تولید اقتصادی[1] (EPQ) موردمطالعه بسیاری از پژوهشگران بوده است. مسائل مقدار سفارش اقتصادی و تولید اقتصادی به دو سؤال اساسی پاسخ می‌دهند: چه مقدار کالا باید سفارش داد؟ و چه موقع باید سفارش داد؟ به‌طور مشابه برای تولید، چه مقدار باید تولید کرد؟ و چه موقع باید تولید کرد؟ پاسخ به این سؤال‌ها برای سازمان‌ها بسیار حائز اهمیت است؛ اما در شرایط واقعی و کاربردی، محدودیت‌هایی نظیر تعداد محصولات، حداکثر مقدار بودجه، فضای انبار، تعداد ارسال و غیره وجود دارد. این تصمیمات باید برای به‌حداقل‌رساندن هزینه‌های سیستم ازجمله بهره‌برداری، راه‌اندازی، تولید، نگهداری و ضایعات گرفته شود. در مدل EPQ، افزایش تدریجی و مستمر موجودی برای انبار در نظر گرفته می‌شود. ازآنجاکه تولید و مصرف کالا به‌طور هم‌زمان در دوره تولید اتفاق می‌افتد، سطح موجودی هرگز به اندازه و حجم انباشته سفارش شده نخواهد رسید. در مدل EPQ تصمیم‌گیری اصلی، تعیین مقدار بهینه تولید در هر دوره است که کل هزینه‌های موجودی را حداقل می‌کند.

در برنامه‌ریزی تولید، مقدار تولید اقتصادی یکی از ابزارهای مهم در تنظیم تولید است؛ به‌طوری‌که تولیدکننده می‌داند چه موقع باید تولید را متوقف کند و از محصولاتی که در انبار موجود است برای پاسخگویی به تقاضا استفاده کند. از محاسبه مقدار تولید اقتصادی برای استفاده از برنامه‌ها و جلوگیری از بی‌نظمی در عملیات تولید، هنگام برنامه‌ریزی تولید استفاده می‌شود. در مدل تولید اقتصادی (EPQ) و مدل سفارش اقتصادی[2] (EOQ)، تعدادی از خطاهای مرتبط با آن نشان داده می‌شوند. مدل‌های EPQ برای تولیدکننده در برنامه‌ریزی تولید استفاده می‌شوند؛ درحالی‌که مدل‌های EOQ برای برنامه‌ریزی منابع، ازجمله مواد اولیه یا محصولات نهایی و برای ادغام در محصولات پیچیده دیگر به‌کار می‌روند [۲۳]. مدل سفارش اقتصادی، یک مدل ریاضی است که می‌تواند برای به‌دست‌آوردن مقدار سفارش بهینه به شرکت‌ها کمک کند تا هزینه‌های کل موجودی را به حداقل برسانند. در بخش تولید، هنگامی که محصولات به‌جای سفارش در داخل شرکت تولید شود، از مدل تولید اقتصادی استفاده می‌شود [۱].

مدل مقدار تولید اقتصادی به‌طور گسترده‌ای در بخش‌های مختلف تولیدی برای تعیین سیاست بهینه بازپرسازی به‌کار رفته است. این مدل دارای فرض‌های محدودکننده زیادی است؛

1. Economic Product Quantity
2. Economic Order Quantity

درحالی‌که در واقعیت عوامل متعددی وجود دارد که در سیاست‌های بهینه مسئله تأثیر بسزایی دارند. برای مثال، در سیستم‌های تولیدی وجود محصولات معیوب، خرابی ماشین‌آلات و تقاضای متغیر اجتناب‌ناپذیر است؛ همچنین درنظرگرفتن عوامل دیگری نظیر خرابی ماشین حین تولید، سیاست‌های نگهداری و تعمیرات می‌تواند مدل‌های تولید اقتصادی را به واقعیت نزدیک‌تر کند؛ بنابراین در پژوهش حاضر یک مسئله تولید اقتصادی با درنظرگرفتن محصولات معیوب حین تولید که درصدی از آن‌ها با صرف هزینه‌ای ثابت قابل‌بازیافت هستند و همچنین خرابی ماشین و تقاضای متغیر بررسی شده است. در این پژوهش همچنین فرض شده است که محصولات با نرخ ثابتی تولید می‌شوند؛ ولی ماشین حین تولید ممکن است دچار خرابی شود. خراب‌شدن ماشین در حین تولید یک متغیر تصادفی است که از توزیع نمایی با پارامتر مشخص پیروی می‌کند. اگر ماشین حین تولید خراب شود، بلافاصله تولید متوقف و ماشین تعمیر می‌شود. برخلاف مدل‌های کلاسیک، تقاضا برای محصول تولیدی به‌صورت تابعی غیرافزایشی از زمان بیان شده است؛ بنابراین در این پژوهش ابتدا مسئله موردنظر مدل‌سازی شده، سپس سیاست‌های بهینه بازپرسازی مسئله بیان‌شده به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که کل هزینه سالیانه حداقل شود. برای این منظور ابتدا یک مدل ریاضی و سپس مقدار متوسط هزینه در واحد زمان تعیین شده و بر اساس مفاهیم بهینه‌سازی سراسری، مقادیر بهینه مشخص شده است. درنهایت با بیان یک مثال عددی مسئله بیان‌شده بررسی و تحلیل شده است.

در ادامه و در بخش دوم، مروری بر پژوهش‌های قبلی مرتبط با موضوع این پژوهش صورت می‌گیرد. در بخش سوم، مدل‌سازی مسئله موردنظر مدل‌سازی و تشریح می‌شود. در بخش چهارم، به‌منظور ارزیابی و تحلیل عملکرد مدل‌های پیشنهادی، یک مثال عددی حل شده و نتایج خروجی آن بررسی و تحلیل می‌شود. در بخش پنجم، جمع‌بندی مطالب این پژوهش و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه خواهد شد.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

موضوع موردبررسی در این پژوهش، مسئله کنترل موجودی با فرض وجود محصول معیوب در فرآیند تولید، دوباره‌کاری با تقاضای متغیر است و همچنین فرض می‌شود که حین فرآیند تولید ممکن است ماشین مورداستفاده دچار خرابی شود که در این حالت تعمیر ماشین اجتناب‌ناپذیر است. بر این اساس در ادامه پیشینه موضوع بررسی می‌شود و درنهایت دسته‌بندی کلی از پیشینه پژوهش بیان خواهد شد.

در مدل‌های تولید اقتصادی، موارد و موضوعات مختلفی به مدل اولیه اضافه شده و هدف از این کار بهبود مدل تولید اقتصادی کلاسیک بوده است. به‌عنوان مثال کو و وانگ[1](۲۰۱۰)، امکان تصمیم‌گیری با انعطاف‌پذیری برای پذیرش یا عدم‌پذیرش تقاضا در مدل تولید اقتصادی را بررسی کردند. آن‌ها امکان پذیرش و عدم‌پذیرش سفارش را به مسئله اضافه کرده و به این صورت عمل کردند که اگر یک سفارش نیاز به هزینه راه‌اندازی بالا داشته باشد، بهتر است که سفارش موردنظر رد شود. آن‌ها برای حل مدل پیشنهادی خود از الگوریتم ژنتیک بهره گرفتند [۱۰]. چیو و همکاران[2] (۲۰۱۰)، مسئله برنامه‌ریزی تولید اقتصادی را با درنظرگرفتن خرابی ماشین و دوباره‌کاری موردبررسی قراردادند. آن‌ها فرض کردند در سیستم تولیدی، موارد معیوب به‌طور تصادفی تولید می‌شود، بخشی از این موارد معیوب غیرقابل تعمیر بوده و بخش دیگر را می‌توان با استفاده از دوباره‌کاری تعمیر کرد. آن‌ها برای حل مسئله خود و تعیین زمان مناسب تولید از روش‌های تحقیق در عملیات و بهینه‌سازی ریاضی استفاده کردند؛ ولی با توجه به پیچیدگی مسئله، امکان به‌دست‌آوردن رابطه کلی برای متغیر تصمیم وجود نداشت [۴]. وی و ویدادانا[3] (۲۰۱۰) بیان کردند که با توجه به تجهیزات تولید غیرقابل‌اعتماد و نگهداری پیشگیرانه تصادفی، استخراج یک تصمیم تولید بهینه در عمل بسیار پیچیده است. بر این اساس آن‌ها یک مسئله تولید اقتصادی را برای اقلام روبه‌زوال با درنظرگرفتن تعمیر پیشگیرانه با زمان تعمیرات تصادفی و دوباره‌کاری بر اساس سیستم FIFO توسعه دادند. با توجه به پیچیدگی حل مسئله موردبررسی، برای حل آن از یک روش جست‌وجوی پیشنهادی برای حالات خاصی استفاده شد. درنهایت آن‌ها بیان کردند که دوباره‌کاری و زمان تعمیر و نگهداری پیشگیرانه تأثیر زیادی بر هزینه کل و زمان تولید بهینه دارد [۲۴]. چانگ[4] (۲۰۱۳)، مسئله تولید اقتصادی چندمحصولی را بررسی کرد و در مدل‌سازی مسئله خود، پنج محدودیت ازجمله هزینه دیرکرد، مکان، سفارش، تهیه و بودجه را با فرض وجود محصولات معیوب در فرآیند تولید با نرخ تقاضای ثابت و بدون خرابی ماشین تولید در نظر گرفت. هدف وی محاسبه مقادیر سفارش بهینه محصولات بود؛ به‌گونه‌ای که تمام محدودیت‌ها رعایت شود و کل هزینه موجودی به حداقل برسد [۳]. سرکار و همکاران (۲۰۱۴)، برای شرایطی که ماشین‌آلات اقلام معیوب را با نرخ تصادفی تولید می‌کنند، مدل موجودی EPQ را با انجام دوباره‌کاری، نرخ تقاضای ثابت و بدون خرابی ماشین بررسی کردند [۱۸]. در این راستا طالعی‌زاده و همکاران (۲۰۱۴)، مسئله تولید اقتصادی (EPQ) چندمحصولی ـ تک‌ماشینی با فرض وقفه در فرآیند، وجود محصولات معیوب و دوباره‌کاری موردبررسی قرار دادند. در این مسئله فرض شده است که در زمان تولید محصول حتماً خرابی

1. Ko & Wang
2. Chiu, et al.
3. Wee & Widyadana
4. Chang

ماشین رخ خواهد داد و بر اساس آن مسئله موردنظر مدل‌سازی شده است. هدف اصلی در مسئله پژوهش به‌حداقل‌رساندن هزینه کل موردانتظار بری تعیین سیاست بازپرسازی بیان شده است [۲۲]. صادقی و همکاران (۲۰۱۶)، بیان کردند که موجود محصولات معیوب در فرآیند تولید امری متداول است و بر این اساس به بررسی سیستم‌های تولیدی تأمین اقلام چندسطحی با درنظرگرفتن مدت‌زمان تدارک غیرقطعی و وجود اقلام معیوب برای هر آیتم با فرض ثابت‌بودن تقاضا پرداختند. آن‌ها در مسئله موردبررسی خود فرض کردند که در حین تولید هر یک از آیتم‌ها، درصد مشخصی از آن‌ها معیوب هستند و کیفیت لازم برای ارسال به مشتری را ندارند. در پژوهش آن‌ها یک مدل کلی مورداستفاده قرار گرفته است و هدف اصلی این مدل به‌حداقل‌رساندن مجموع هزینه نگهداری موجودی، هزینه برگشت و هزینه راه‌اندازی است [۱۷]. حسن‌پور و همکاران (۲۰۱۸)، مسئله مقدار سفارش اقتصادی را با فرض فسادپذیربودن کالا و همچنین تقاضای متغیر بررسی کردند. هدف از مدل پیشنهادی آن‌ها، تعیین سیاست بازپرسازی به‌گونه‌ای است که سود کل سیستم موجودی حداکثر شود [۹]. لیاو[1] (۲۰۱۵)، یک مدل EPQ را در نظر گرفت که در آن فرآیند تولید می‌تواند موارد اقلام معیوب را با سرعتی ثابت و با توزیع خطی و نمایی تولید کند. در این پژوهش، امکان دوباره‌کاری برای اقلام معیوب در نظر گرفته شده است [۱۱]. دال و منگاتی[2] (۲۰۱۹)، یک مدل EPQ را برای یک سیستم تولید و توزیع ایجاد کردند که کالاهای معیوب به‌صورت احتمالی در مرحله تولید، انباشته شده و اقلام معیوب دوباره به‌عنوان مواد اولیه بازیافت می‌شوند [۶]. کولدانی و انگیوس[3] (۲۰۱۹)، تأثیر فرآیندهای نامناسب در زمان تولید را بررسی کردند. آن‌ها برای انتخاب زمان تولید مناسب، یک راه‌حل برای مسئله با تولید اقلام معیوب و توقف، به‌علت خرابی دستگاه در نظر گرفتند [۵]. صادقی (۲۰۱۹)، با درنظرگرفتن دریافت چندگانه و تقاضای گسسته و دوره‌ای در سیستم‌های تولید اقتصادی، به بررسی تعیین سیاست بهینه بازپرسازی با فرض اینکه تمام محصولات تولیدی کیفیت لازم برای تحویل به مشتری را ندارند، پرداخت. بر اساس نتایج حاصل راهکارهای مدیریتی بر اساس تحلیل حساسیت پارامترهای مدل ارائه شد [۱۳]. صادقی (۲۰۱۹) ،همچنین سیستم‌های تولید با تقاضای متغیر را در نظر گرفت و یک مدل ریاضی عدد صحیح با هدف حداکثرکردن سود ارائه داد. وی ابتدا مسئله را در حالت پیوسته حل کرده و سپس با استفاده از یک رویکرد ابتکاری جواب مسئله در حالت گسسته را تعیین کرد. السلامی[4](۲۰۱۹)، مسئله کنترل موجودی تولید اقتصادی با فرض وجود محصولات معیوب در فرآیند تولید را بررسی کرد. وی برای شناسایی محصولات معیوب بازرسی صددرصد را در نظر گرفت و برای رفع ایرادات محصولات معیوب،

1. Liao
2. Dal Borgo & Meneghetti
3. Colledani & Angius
4. Al-Salamah

دوباره‌کاری را در نظر گرفت. در مسئله موردبررسی فرض شده است که نرخ تقاضا ثابت است و در ماشین خرابی رخ نمی‌دهد [۱]. رجبی و همکاران (۲۰۲۰)، مسئله برنامه‌ریزی کنترل موجودی روزنامه‌فروش دودوره‌ای را با فرض تقاضای احتمالی و وابسته به قیمت و قیمت خرید تصادفی در نظر گرفتند [۱۲]. یانگ و همکاران[1] (۲۰۲۰)، یک مدل EPQ را برای یک فرآیند تولید اقلام معیوب هم‌زمان با درنظرگرفتن زمان خرابی با توزیع‌های مختلف بررسی کردند. هدف آن‌ها، یافتن یک اندازه تولید بود که کل هزینه موردنظر را در واحد زمان به‌حداقل برساند. در پژوهش آن‌ها چندین مدل بررسی شد و یک روش عددی برای به‌دست‌آوردن مقدار تولید مطلوب به دست آمد [۲۵]. سیمون و همکاران[2] (۲۰۲۱)، یک مدل تولید اقتصادی را با فرض تصادفی‌بودن تولید اقلام معیوب بررسی کردند. در این مدل از یک استراتژی مناسب برای به‌کارگیری و تعمیر ضایعات اقلام معیوب، پس از شناسایی آن‌ها استفاده شد؛ همچنین در صورت ترمیم اقلام معیوب، برای ادامه تأمین تقاضا یا استفاده مجدد از آن به‌عنوان مواد اولیه، می‌توان از منابع فرآیند تولید بهتری بهره گرفت [۲۰].

طاهری و همکاران (۲۰۲۱)، مسئله تولید اقتصادی با فرض دریافت چندگانه با نرخ تقاضای ثابت موردبررسی قرار دادند. آن‌ها همچنین فرض کردند که ماشین حین تولید دچار خرابی شود و خرابی ماشین را یک متغیر تصادفی پواسون در نظر گرفتند. آن‌ها مسئله را بر اساس الگوریتم‌های ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید حل کردند و نتایج را مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دادند [۲۱]. شرما و همکاران[3] (۲۰۲۱)، توسعه یک سیستم موجودی را با درنظرگرفتن دوباره‌کاری بر روی اقلام ناقص و معیوب موردبررسی قرار دادند. آن‌ها فرض کردند تقاضا متغیر بوده و کمبود به‌صورت جزئی است؛ ولی خرابی ماشین را در حین فرآیند تولید در نظر نگرفتند. آن‌ها با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا[4]، جواب بهینه مسئله را تعیین کردند [۱۹].

با توجه به پیشینه پژوهش، یکی دیگر از عوامل کلیدی مؤثر در کنترل موجودی، وجود محصولات معیوب در حین فرآیند تولید است که با درنظرگرفتن دوباره‌کاری یا دورریز آن، می‌تواند باعث هزینه‌های اضافی برای سیستم باشد. علاوه بر تولید محصولات معیوب در فرآیند تولید، یکی دیگر از عوامل قابل‌اطمینان حیاتی که می‌تواند در هنگام وقوع، به‌ویژه در یک محیط تولید، بر فرآیند تولید و میزان تولید تأثیرگذار باشد، خرابی تجهیزات تولیدی است. در این راستا گرونولت و همکاران (۱۹۹۲)[5] [۸]، دو سیاست کنترل تولید برای زمانی که خرابی تصادفی ماشین رخ دهد، پیشنهاد کردند: در سیاست نخست، فرض می‌شود که پس از یک خرابی، تولید

1. Yang, et al.
2. Siemon, et al.
3. Sharma, et al.
4. Mathematica
5. Groenevelt, et al.

متوقف نمی‌شود. در سیاست دوم، بلافاصله پس از خرابی ماشین، تولید متوقف می‌شود و تعمیر ماشین صورت می‌گیرد. از موارد دیگری که خیلی موردتوجه پژوهشگران قرار گرفته است، وجود تقاضا به‌صورت متغیر یا احتمالی برای محصولات مختلف است. با توجه به ماهیت تقاضا، اصولاً برای بیشتر محصولات، تقاضا ثابت نیست و متأثر از سطح موجودی، قیمت فروش آن و یا وابسته به زمان است. در ادامه پژوهش‌های مرتبط به‌صورت خلاصه در جدول ۱، آورده شده است. در این جدول، پژوهش‌های مرتبط با سیستم‌های تولید اقتصادی با درنظرگرفتن محصولات معیوب، وجود یا عدم‌وجود خرابی ماشین و محصولات معیوب، وجود یا عدم‌وجود دوباره‌کاری، نوع تقاضا و رویکرد حل دسته‌بندی شده است.

جدول ۱. دسته‌بندی پیشینه پژوهش‌های مرتبط

پژوهشگر (سال)	ضایعات	تقاضا	خرابی ماشین	دوباره‌کاری	معیوب	رویکرد حل			منبع
						بهینه‌سازی	ابتکاری	فرا ابتکاری	
چیو و همکاران (۲۰۱۰)	–	ثابت	تصادفی	–	–	✓	–	–	[۴]
وی و ویدادانا (۲۰۱۳)	–	ثابت	–	✓	✓	✓	✓		[۲۴]
السلامی (۲۰۱۹)	–	ثابت	–	✓	✓	✓	–	–	[۱]
عسگر و همکاران (۲۰۱۹)	–	ثابت	تصادفی	–	–	✓	–	–	[۲]
فکری (۲۰۱۹)	–	ثابت	تصادفی	✓	✓	–	✓	–	[۷]
طاهری (۲۰۲۱)	–	ثابت	تصادفی	–	✓	✓	✓	–	[۲۱]
صادقی و همکاران (۲۰۲۱)	–	متغیر	–	–	–	✓	✓	–	[۱۵]
صادقی (۲۰۲۲)	–	متغیر	–	–	✓	–	✓	–	[۱۶]
شرما (۲۰۲۲)	–	متغیر	–	–	✓	✓	✓	–	[۱۹]
پژوهش حاضر	✓	متغیر	تصادفی	✓	✓	✓	✓	–	

در مدل میزان تولید اقتصادی اولیه برای ساده‌سازی مدل، فرض‌های متعددی بیان شده است؛ درحالی‌که در واقعیت عوامل مختلفی وجود دارند که بر میزان تولید و هزینه‌های سیستم تأثیر می‌گذارند. نقص تجهیزات تولیدی، عاملی است که در یک سیستم تولید رخ می‌دهد. وقتی

که یک سیستم تولیدی مشغول تولید است، ممکن است ماشین‌آلات دچار خرابی شوند و وقتی که نقص تجهیزات رخ می‌دهد، به‌خصوص در محیط‌های تولید خودکار، می‌تواند تا حد زیادی مختل‌کننده باشد. دو خط‌مشی کنترل تولید برای زمانی که ماشین‌آلات حین تولید دچار خرابی می‌شوند، وجود دارد. در خط‌مشی نخست، فرض می‌شود که ماشین‌آلات پس از خرابی بلافاصله تعمیر نمی‌شوند و با وقفه همراه هستند (بدون اصلاح یا خط‌مشی NR). خط‌مشی دوم این است که پس از خرابی ماشین‌آلات، تعمیر بدون وقفه انجام می‌گیرد که آن را خط‌مشی AR[1] می‌نامند.

عامل دیگری که می‌تواند تأثیر بسزایی بر سیستم‌های تولید اقتصادی داشته باشد، نوع تقاضا برای محصول تولیدشده است. بر اساس مدل تولید اقتصادی کلاسیک، تقاضا برای محصول نهایی به‌صورت قطعی بوده و مقدار آن مشخص و ثابت است؛ اما در واقعیت تقاضای محصول ممکن است به‌صورت قطعی مشخص نباشد. برای مثال، تقاضا برای برخی از محصولات مانند قطعات رایانه، کالاهای تابع مُد و کالاهای فصلی با زمان تغییر می‌کند؛ به‌عبارت‌دیگر تقاضا در طول افق برنامه‌ریزی متغیر است و به‌صورت تابعی از زمان بیان می‌شود.

با توجه به بررسی مبانی نظری موضوع در جدول ۱، مدل پیشنهادی با مدل‌های سایر پژوهشگران در سال‌های اخیر مقایسه شده است. در این پژوهش یک مدل تولید اقتصادی با درنظرگرفتن خرابی تصادفی ماشین‌آلات و تقاضای وابسته به زمان بررسی خواهد شد. در مسئله موردبررسی فرض می‌شود، محصولات با نرخ ثابت و مشخصی تولید شوند؛ ولی ماشین حین تولید محصول ممکن است دچار خرابی شوند و به‌علت خرابی ماشین‌آلات، خط تولید متوقف شود. در این صورت بلافاصله تعمیر ماشین/ ماشین‌آلات صورت می‌گیرد و بعد از تعمیر دوباره تولید خود را شروع می‌کنند. در این پژوهش فرض شده که زمان رخداد خرابی تصادفی است؛ اما زمان تعمیر ماشین مقدار ثابت و مشخصی در نظر گرفته می‌شود؛ همچنین تقاضای محصول نهایی متغیر است و به‌صورت تابعی از زمان بیان می‌شود. در ادامه با اثبات محدب‌بودن تابع، روشی برای حل مدل پیشنهادی و معرفی جواب بهینه ارائه شده است. درنهایت با بیان یک مثال عددی پارامترهای مدل و نتایج حاصل بررسی و تحلیل می‌شود.

۳. روش‌شناسی پژوهش

در این پژوهش، سیستم تولیدی تک‌ماشینی با نرخ تولید محصول ثابت و برابر P در نظر گرفته شده است. در حین تولید درصدی از قطعات تولیدی کیفیت لازم برای پذیرش محصول سالم را ندارند؛ به همین دلیل فرض شده است که حین تولید، X واحد از محصولات تولیدی معیوب هستند. اگر نرخ تولید قطعات معیوب با λ نشان داده شود در این صورت رابطه ۱، بین نرخ تولید و نرخ خرابی وجود دارد.

1. Abort / Resume

$$PX = \lambda$$ رابطه (۱)

قطعات معیوب قابل‌بازیافت هستند و با نرخ P_1 دوباره‌کاری می‌شوند. در این پژوهش فرض شده است که تمام محصولات قابل‌بازیافت نیستند و درصد مشخصی از آن‌ها (θ) دورریز می‌شوند که واحد دفع هر واحد محصول برابر C_s فرض شده است. در این صورت (θ−۱) واحد از محصولات معیوب، قابل‌بازیافت هستند که هزینه بازیافت هر واحد محصول برابر C_R و هزینه نگهداری h_1 برای هر واحد محصول قابل‌بازیافت در نظر گرفته شده است. تقاضا محصول نهایی در هر دوره، پویا بوده و تابع آن از رابطه ۲، پیروی می‌کند که در آن a نشان‌دهنده ظرفیت بازار و یک مقدار مثبت است. b نشان‌دهنده حساسیت تقاضا به زمان بوده و مقدار آن منفی است.

$$d(t) = a + b(t)$$ رابطه (۲)

در حین تولید، احتمال خرابی ماشین وجود دارد. این احتمال تصادفی فرض شده و با توزیع نمایی نشان داده می‌شود. این موضوع سبب شده است که دو حالت ایجاد شود. در حالت نخست، این احتمال وجود دارد که ماشین در حین تولید خراب شود. اگر مدت‌زمانی که ماشین شروع به تولید می‌کند تا زمانی که دچار خرابی می‌شود برابر با t باشد، در این صورت با توجه به اینکه از سیاست AR استفاده شده است، بعد از خرابی ماشین، تولید سریعاً متوقف می‌شود و تعمیر ماشین شروع می‌شود که هزینه آن برابر M در نظر گرفته شده است و مدت‌زمان لازم برای تعمیر ماشین ثابت و برابر t_r است. بعد از تعمیر ماشین، چرخه تولید ادامه می‌یابد تا بتواند سفارش‌ها را برآورد کند. بعد از اتمام تولید، محصولات معیوب دوباره‌کاری شده و آماده ارسال می‌شوند و مدت‌زمان لازم برای انجام دوباره‌کاری برابر t_2' در نظر گرفته شده است. بعد از اتمام دوباره‌کاری، از موجودی انبار برای برآورده‌کردن تقاضا استفاده می‌شود و تا شروع دوره کاری بعدی از موجودی انبار استفاده می‌شود. در این پژوهش مدت‌زمان مصرف برابر T_3' در نظر گرفته شده است. طول دوره در حالت اول برابر T' در نظر گرفته شده و بر اساس آن، هزینه حالت اول با $TC_1(t)$ نشان داده شده است.

در حالت دوم ممکن است خراب‌شدن ماشین بعد از زمان تولید (t_1) رخ دهد. در این صورت مدت‌زمان دوباره‌کاری محصولات معیوب برابر t_2، زمان موردنیاز برای مصرف قطعات برابر t_3، طول هر دوره برابر T و کل هزینه موجودی در هر دوره $TC_2(t)$ در نظر گرفته شده است. سایر پارامترهای مسئله به شرح زیر است:

پارامترها

P: نرخ تولید قطعات

λ: نرخ تولید قطعات معیوب

p_1: نرخ تولید در زمان دوباره‌کاری

θ: درصد قطعات معیوب

M: هزینه تعمیر ماشین

K: هزینه راه‌اندازی

h: هزینه نگهداری هر واحد

h_1: هزینه نگهداری هر واحد دوباره‌کاری

C: هزینه تولید هر واحد

c_s: هزینه دفع قطعات قراضه

c_R: هزینه دوباره‌کاری هر واحد

X: درصد تولید قطعات معیوب

t: متغیر تصادفی نشان‌دهنده مدت‌زمان لازم تا خرابی ماشین

متغیر تصمیم مستقل

t_1: مدت‌زمان تولید

متغیرهای تصمیم وابسته

T: طول هر دوره، اگر خرابی ماشین بعد از اتمام تولید رخ دهد.

T': طول هر دوره، اگر خرابی ماشین حین زمان تولید رخ دهد.

t_2: مدت‌زمان دوباره‌کاری قطعات معیوب در حالت دوم

t_3: مدت‌زمان موردنیاز برای مصرف قطعات در حالت دوم

T_2': مدت‌زمان دوباره‌کاری قطعات معیوب در حالت اول

T_3': مدت‌زمان موردنیاز برای مصرف قطعات در حالت اول

t_r: مدت‌زمان تعمیر دستگاه

Q: حجم تولیدی هر دوره

t_B: زمان شروع تولید بعد از تعمیر ماشین در حالت اول

t_C: زمان پایان تولید و زمان شروع دوباره‌کاری در حالت اول

t_D: زمان پایان دوباره‌کاری در حالت اول

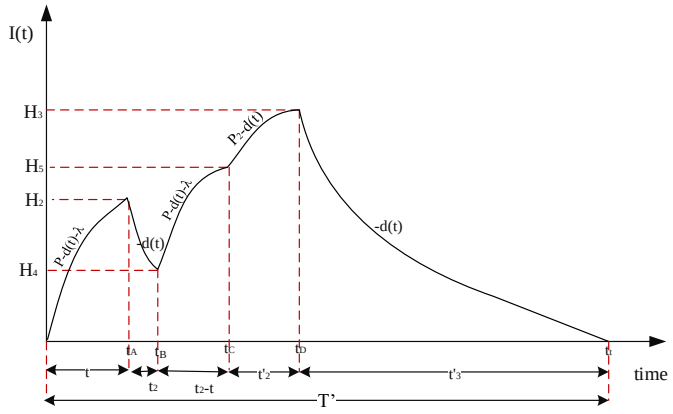
t_E: زمان پایان دوره در حالت اول

t_F: زمان پایان تولید در حالت دوم
t_G: زمان پایان تولید و زمان شروع دوباره‌کاری در حالت دوم
t_H: زمان پایان دوره در حالت دوم

در این شرایط و به‌منظور مدل‌سازی، مفروضات زیر در نظر گرفته شده است:
ـ نرخ تقاضای محصول به‌صورت متغیر در واحد زمان؛
ـ نرخ تولید ثابت؛
ـ خرابی ماشین‌آلات به‌صورت تصادفی؛
ـ زمان تعمیر ثابت؛
ـ استفاده از سیاست AR برای تعمیر ماشین‌آلات.

مدل‌سازی مسئله. برای مدل‌سازی مسئله ابتدا هزینه حالت اول و دوم محاسبه می‌شود؛ سپس با توجه به اینکه زمان رخدادن خرابی ماشین به‌صورت احتمالی بیان شده است، در این صورت رخدادن هر یک از حالت‌های بیان‌شده احتمالی است و از توزیع مشخصی پیروی می‌کند؛ بنابراین مقدار متوسط هزینه در واحد زمان محاسبه می‌شود و بر اساس مفاهیم بهینه‌سازی، مقادیر متغیرهای تصمیم تعیین خواهد شد.

محاسبه هزینه کل در حالت نخست. در این حالت فرض شده است که ماشین در زمان تولید دچار خرابی می‌شود. با توجه به اینکه در صورت مواجه‌شدن با خرابی ماشین از سیاست (AR) برای تعمیر ماشین استفاده می‌شود، بعد از وقوع خرابی ماشین، بلافاصله تولید متوقف شده و مبادرت به تعمیر ماشین می‌شود و مدت‌زمان تعمیر نیز t_r واحد زمانی طول می‌کشد. بعد از اتمام تعمیر، تولید دوباره شروع می‌شود. پس از زمان پایان تولید، به دوباره‌کاری قطعات معیوب پرداخته می‌شود و بعد از آن زمان مصرف شروع شده و تا پایان دوره ادامه می‌یابد. شکل (۱، سطح موجودی تولیدکننده را در طول زمان برای حالت نخست نشان می‌دهد. در این شکل ماشین از زمان صفر شروع به تولید کرده است و با نرخ p تولید صورت می‌گیرد؛ سپس در زمان t_A، ماشین دچار خرابی می‌شود؛ بنابراین خط تولید متوقف شده و تعمیر ماشین شروع خواهد شد. در زمان t_B تعمیر ماشین به اتمام می‌رسد و فرآیند تولید مجدداً از سر گرفته می‌شود و درنهایت در زمان t_C تولید به اتمام می‌رسد و دوباره‌کاری محصولات معیوب آغاز می‌شد و تا زمان t_D به طول می‌انجامد. بعد از آن تولید متوقف می‌شود و محصولات تولیدی به فروش می‌رسد. بعد از اتمام محصولات مجدداً روند تولید شروع می‌شود و مانند توضیحات بیان‌شده چرخه بعدی ادامه می‌یابد.



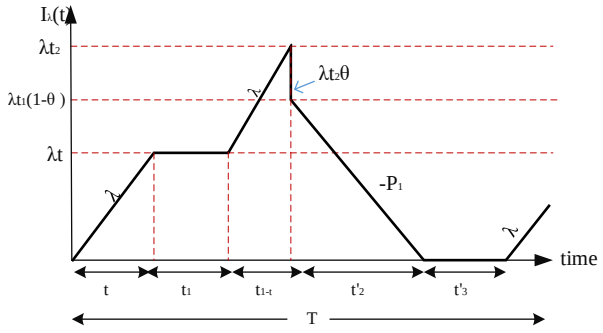
شکل ۱. نمودار تغییرات سطح موجودی حالت نخست

در این مسئله در زمان تولید درصد مشخص و ثابتی از محصولات معیوب هستند که نرخ تولید محصولات معیوب با λ نشان داده می‌شود. همه محصولات معیوب تولیدی، قابل‌بازیافت نیستند و درصد مشخص از آن‌ها دورریز شده و مابقی بازیافت می‌شوند. شکل ۲، سطح موجودی محصولات معیوب را در طول زمان برای حالت نخست نشان می‌دهد. در این حالت در ابتدای دوره میزان موجودی صفر است، ماشین شروع به تولید می‌کند و با نرخ λ محصول معیوب تولید می‌شود. قبل از اتمام دوره‌ی تولید، ماشین دچار خرابی می‌شود. اگر زمان خراب شدن ماشین با t_A نشان داده شود، در این صورت سطح تغییرات موجودی نسبت به زمان بر اساس رابطه 3، است.

$$\frac{\partial I_1(t)}{\partial t} = P - d(t) - \lambda \qquad 0 \le t \le t_A$$ رابطه (۳)

با توجه به رابطه (۱ و ۲) و با توجه به اینکه مقدار موجودی اول دوره برابر صفر است ($I_1(0) = 0$)، می‌توان مقدار سطح موجودی در این حالت را به‌صورت زیر محاسبه کرد. لازم به توضیح است که رابطه ۳، یک معادله مرتبه اول به‌شمار می‌رود و برای حل آن از نرم‌افزار متمتیکا استفاده شده است.

$$I_1(t) = Pt - at - \frac{b}{2}t^2 - \lambda t$$ رابطه (۴)



شکل ۲. نمودار تغییرات تعداد محصولات معیوب در حالت اول

شکل ۲، میزان محصولات معیوب تولیدی طی فرآیند تولید در هر دوره را نشان می‌دهد. ماشین از زمان صفر که شروع به تولید می‌کند، محصولات معیوب با نرخ λ تولید می‌کند و بعد از مدت‌زمان t ماشین دچار خرابی می‌شود. همان‌طور که در شکل مشخص است، در طول زمان تعمیر خرابی محصول معیوبی تولید نمی‌شود که بعد از تعمیر ماشین و ازسرگیری فرآیند تولید، تولید محصولات معیوب هم‌زمان با تولید محصولات شروع می‌شود. بعد از اتمام تولید در زمان t_C، محصولاتی که قابل‌بازیافت نیستند به‌عنوان ضایعات در نظر گرفته می‌شوند که مقدار آن برابر $\lambda t_2 \theta$ است و مابقی محصولات معیوب باقیمانده قابل‌بازیافت بوده و با نرخ p_1 بازیافت می‌شوند.

با توجه به شکل‌های ۱ و ۲، ماشین بعد از شروع به کار و قبل از اتمام تولید، دچار خرابی می‌شود. اگر زمان خرابی ماشین با t_A نشان داده شود، در این صورت در این زمان، ماشین متوقف شده و تعمیر انجام می‌شود و تعمیر ماشین تا زمان t_A طول می‌کشد. در این مدت‌زمان چون تولید صورت نمی‌گیرد، سطح موجودی به خاطر برآورده‌کردن تقاضا کاهش می‌یابد. در این صورت تغییرات سطح موجودی نسبت به زمان در این حالت را می‌توان به‌صورت رابطه ۵، نشان داد.

$$\frac{\partial I_2(t)}{\partial t} = -d(t) \qquad t_A \le t \le t_B$$ رابطه (۵)

با حل معادله دیفرانسیل بیان‌شده در رابطه ۵، با درنظرگرفتن شرط اولیه $I_2(t_A) = I_1(t_A)$، میزان سطح موجودی را در بازه $[t_A, t_B]$ به‌صورت رابطه ۶، محاسبه می‌شود.

$$I_2(t) = (-at - \frac{b}{2}t^2) + (Pt_A - at_A - \frac{b}{2}t_A{}^2 - \lambda t_A) \qquad t_A \le t \le t_B$$ رابطه (۶)

بعد از تعمیر، ماشین بلافاصله تولید را شروع می‌کند و سطح موجودی مانند بازه اول به‌صورت رابطه ۷، محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial I_3(t)}{\partial t} = P - d(t) - \lambda \qquad t_B \le t \le t_C$$ رابطه (۷)

با حل معادله دیفرانسیل بیان‌شده در رابطه ۷ و با درنظرگرفتن شرط اولیه $I_3(t_B) = I_2(t_B)$، سطح موجودی در بازه $[t_B, t_C]$ به‌صورت رابطه ۸، محاسبه می‌شود.

$$I_3(t) = (Pt - at - \frac{b}{2}t^2 - \lambda t + ((-at_B - \frac{b}{2}t_B{}^2) + (Pt_A - at_A - \frac{b}{2}t_A{}^2 - \lambda t_A)$$
$$t_B \le t \le t_C$$ رابطه (۸)

بعد از اتمام دوره تولید، دوباره‌کاری محصولات معیوب شروع می‌شود. در این حالت میزان تغییرات سطح موجودی نسبت به زمان در این بازه به‌صورت رابطه ۹، محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial I_4(t)}{\partial t} = P_1 - d(t) \qquad t_C \le t \le t_D$$ رابطه (۹)

با حل معادله دیفرانسیل بیان‌شده در رابطه ۷، با درنظرگرفتن شرط اولیه $I_4(t_C) = I_3(t_C)$، میزان سطح موجودی، در بازه $[t_C, t_D]$ به‌صورت رابطه ۱۰، محاسبه می‌شود.

$$I_4(t) = ((P_1 t - at - \frac{b}{2}t^2) + ((Pt_C - at_C - \frac{b}{2}t_C{}^2 - \lambda t_C)) + ((-at_B - \frac{b}{2}t_B{}^2))$$
$$+(Pt_A - at_A - \frac{b}{2}t_A{}^2 - \lambda t_A)) \qquad t_C \le t \le t_D$$ رابطه (۱۰)

درنهایت بعد از اتمام تولید و بازیافت، تولید متوقف می‌شود تا موجودی ذخیره‌شده در انبار به فروش برسد. برای این حالت که فقط تقاضا وجود دارد، تغییرات سطح موجودی نسبت به زمان به‌صورت رابطه ۱۱، محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial I_5(t)}{\partial t} = -d(t) \qquad t_D \le t \le t_E$$ رابطه (۱۱)

با توجه به رابطه ۱۱ و شرط اولیه $I_5(t_D) = I_4(t_D)$، سطح موجودی آن به‌صورت رابطه ۱۲، تعیین می‌شود.

$$I_5(t) = ((-at - \frac{b}{2}t^2)) + ((P_1 t_D - at_D - \frac{b}{2}{t_D}^2)) +$$
$$((Pt_C - at_C - \frac{b}{2}{t_C}^2 - \lambda t_C)) + ((-at_B - \frac{b}{2}{t_B}^2)) + \quad \text{رابطه (۱۲)}$$
$$(Pt_A - at_A - \frac{b}{2}{t_A}^2 - \lambda t_A)) \qquad t_D \le t \le t_E$$

حجم تولیدی در هر دوره به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = t_1.P \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

محاسبه طول دوره در حالت نخست. طول هر دوره با T' نشان داده می‌شود و بر اساس مطالب بیان‌شده، روابط زیر برقرار است.

$$t_A = t \quad \text{رابطه (۱۴)}$$
$$t_B = t + t_r \quad \text{رابطه (۱۵)}$$
$$t_C = t_1 + t_r \quad \text{رابطه (۱)}$$
$$t_D = t_1 + t_r + \frac{\lambda t_1(1-\theta)}{p_1} \quad \text{رابطه (۲)}$$

بعد از پایان دوره، سطح موجودی به صفر می‌رسد؛ بنابراین میزان موجودی در زمان t_E برابر صفر است؛ سپس بر اساس این مفهوم می‌توان مقدار t_E را به‌صورت زیر محاسبه کرد.

$$I_5(t_E) = 0 \Rightarrow t_E = \frac{1}{b}(-a + \sqrt{(a^2 +}$$
$$2b(-2at + Pt - bt^2 - t\lambda - 2at_1 + \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

$$Pt_1 - \theta\lambda t_1 - \frac{a\lambda t_1}{P_1} + \frac{a\theta\lambda t_1}{P_1} + P_1 t_1 - bt_1^2 - \frac{b\lambda^2 t_1^2}{2P_1^2}$$
$$+ \frac{b\theta\lambda^2 t_1^2}{P_1^2} - \frac{b\theta^2\lambda^2 t_1^2}{2P_1^2} - \frac{b\lambda t_1^2}{P_1} + \frac{b\theta\lambda t_1^2}{P_1} - 3at_r + Pt_r$$
$$-btt_r - \lambda t_r + P_1 t_r - 2bt_1 t_r - \frac{b\lambda t_1 t_r}{P_1} + \frac{b\theta\lambda t_1 t_r}{P_1} - \frac{3bt_r^2}{2})))$$

با توجه به پیچیده‌بودن رابطه ۱۸، مقدار آن بر اساس سری تیلور به‌صورت زیر تخمین زده شده است.

$$t_E = \gamma \times t + \eta;$$

که در آن γ و η به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\eta = (-a + (a^2 - 2b^2S_1^2 - \frac{b^2(-1+\theta)^2\lambda^2S_1^2}{P_1^2} - 2b(3a - P + \lambda)S_r - 3b^2S_r^2 + 2bP_1(S_1 + S_r) + \frac{2b(-1+\theta)\lambda S_1(a + bS_1 + bS_r)}{P_1} - 2bS_1(2a - P + \theta\lambda + 2bS_r))^{\frac{1}{2}})/b$$

$$\gamma = -\frac{P_1^2(2a - P + \lambda + bS_r)\sqrt{l}}{m}$$

که در آن l و m به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$l = a^2 - 2b^2S_1^2 - \frac{b^2(-1+\theta)^2\lambda^2S_1^2}{P_1^2} - 2b(3a - P + \lambda)S_r - 3b^2S_r^2 + 2bP_1(S_1 + S_r) + \frac{2b(-1+\theta)\lambda S_1(a + bS_1 + bS_r)}{P_1} - 2bS_1(2a - P + \theta\lambda + 2bS_r)$$

$$m = -b^2(-1+\theta)^2\lambda^2S_1^2 + 2bP_1^3(S_1 + S_r) + 2b(-1+\theta)\lambda P_1S_1(a + bS_1 + bS_r) + P_1^2(a^2 - 2b^2S_1^2 - 2b(3a - P + \lambda)S_r - 3b^2S_r^2 - 2bS_1(2a - P + \theta\lambda + 2bS_r))$$

مقدار t_E زمان پایان هر دوره تولیدی است؛ بنابراین با طول هر دوره برابر است.

$$T' = t_E$$ رابطه (۳)

محاسبه هزینه نگهداری هر دوره در حالت اول. با توجه به اینکه سطوح موجودی به‌دست‌آمده در تمامی بازه‌ها متغیر و وابسته به زمان است هزینه نگهداری هر یک از سطوح به‌صورت روابط زیر به‌دست می‌آید.

ـ هزینه نگهداری در بازه اول:

$$h\times\int_0^{t_A} I_1(t) = h\times(\frac{P}{2}t_A^2 - \frac{a}{2}t_A^2 - \frac{b}{6}t_A^3 - \frac{\lambda}{2}t_A^2)$$ رابطه (۲۰)

ـ هزینه نگهداری در بازه دوم:

$$h\times\int_{t_A}^{t_B} I_2(t)dt = h\times((-\frac{a}{2}t_B^2 - \frac{b}{6}t_B^3) + (Pt_At_B - at_At_B - \frac{b}{2}t_A^2t_B - \lambda t_At_B)) - ((-\frac{a}{2}t_A^2 - \frac{b}{6}t_A^3) + (Pt_A^2 - at_A^2 - \frac{b}{2}t_A^3 - \lambda t_A^2))$$ رابطه (۲۱)

ـ هزینه نگهداری در بازه سوم :

$$h\times\int_{t_B}^{t_C} I_3(t)dt = h\times((\frac{p}{2}t_C^2-\frac{a}{2}t_C^2-\frac{b}{6}t_C^3-\frac{\lambda}{2}t_C^2)+$$
$$((-at_Bt_C-\frac{b}{2}t_B^2t_C)+(Pt_At_C-at_At_C-\frac{b}{2}t_A^2t_C-\lambda t_At_C))$$
$$-((\frac{p}{2}t_B^2-\frac{a}{2}t_B^2-\frac{b}{6}t_B^3-\frac{\lambda}{2}t_B^2)+((-at_B^2-\frac{b}{2}t_B^3)+$$
$$(Pt_At_B-at_At_B-\frac{b}{2}t_A^2t_B-\lambda t_At_B))$$

رابطه (۴)

ـ هزینه نگهداری در بازه چهارم:

$$h\times\int_{t_C}^{t_D} I_4(t)dt = h\times(((\frac{p_1}{2}t_D^2-\frac{a}{2}t_D^2-\frac{b}{6}t_D^3)+((Pt_Ct_D-at_Ct_D-\frac{b}{2}t_C^2t_D-\lambda t_Ct_D))$$
$$+((-at_Bt_D-\frac{b}{2}t_B^2t_D))+(Pt_At_D-at_At_D-\frac{b}{2}t_A^2t_D-\lambda t_At_D)))$$
$$-(((\frac{p_1}{2}t_C^2-\frac{a}{2}t_C^2-\frac{b}{6}t_C^3)+((Pt_C^2-at_C^2-\frac{b}{2}t_C^3-\lambda t_C^2))+$$
$$((-at_Bt_C-\frac{b}{2}t_B^2t_C))+(Pt_At_C-at_At_C-\frac{b}{2}t_A^2t_C-\lambda t_At_C)))$$

رابطه (۲۳)

ـ هزینه نگهداری در بازه پنجم:

$$h\times\int_{t_D}^{t_E} I_5(t)dt = h\times(((-\frac{a}{2}t_E^2-\frac{b}{6}t_E^3)+((P_1t_Dt_E-at_Dt_E-\frac{b}{2}t_D^2t_E))$$
$$+((Pt_Ct_E-at_Ct_E-\frac{b}{2}t_C^2t_E-\lambda t_Ct_E))+((-at_Bt_E-\frac{b}{2}t_B^2t_E))$$
$$+(Pt_At_E-at_At_E-\frac{b}{2}t_A^3t_E-\lambda t_At_E)))-(((-\frac{a}{2}t_D^2-\frac{b}{6}t_D^3)+(P_1t_D^2-at_D^2-\frac{b}{2}t_D^3))$$
$$+((Pt_Ct_D-at_Ct_D-\frac{b}{2}t_C^2t_D-\lambda t_Ct_D))+((-at_Bt_D-\frac{b}{2}t_B^2t_D))+(Pt_At_D-at_At_D-\frac{b}{2}t_A^3t_D-\lambda t_At_D)))$$

رابطه (۵)

هزینه نگهداری محصولات معیوب با توجه شکل ۲، به‌صورت زیر است.

$$(h\times((\frac{t\times\lambda t}{2})+(t_r\times\lambda t)+(\frac{(\lambda t+\lambda t_1)\times(t_1-t)}{2})))$$

رابطه (۶)

هزینه نگهداری برای هر واحد دوباره‌کاری برابر h_1 است؛ بنابراین هزینه نگهداری دوباره‌کاری تمام محصولات معیوب به‌صورت رابطه ۲۶، خواهد بود.

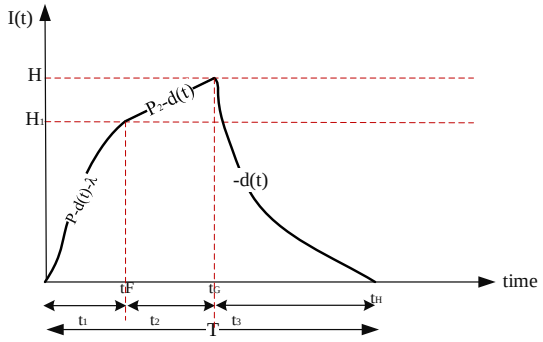
$$h_1\times(\frac{Pt_2'}{2}t_2')$$

رابطه (۷)

با توجه به روابط ذکرشده درنهایت هزینه کل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

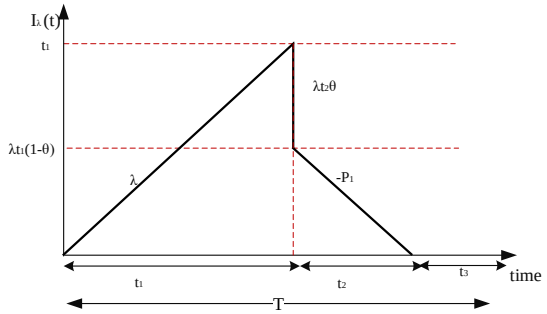
$$TC_1(t_1)=(c\times t_1\times P)+K+M+\left(C_R\times t_{_1}\times P\times X\times(1-\theta)\right)$$
$$+\left(C_S\times t_1\times P\times X\times\theta\right)+(h\times(\frac{P}{2}t_A^2-\frac{a}{2}t_A^2-\frac{b}{6}t_A^3-\frac{\lambda}{2}t_A^2))$$
$$+(h\times((-\frac{a}{2}t_B^2-\frac{b}{6}t_B^3)+(Pt_At_B-at_At_B-\frac{b}{2}t_A^2t_B-\lambda t_At_B))-$$
$$((-\frac{a}{2}t_A^2-\frac{b}{6}t_A^3)+(Pt_A^2-at_A^2-\frac{b}{2}t_A^3-\lambda t_A^2)))+$$
$$(h\times((\frac{p}{2}t_C^2-\frac{a}{2}t_C^2-\frac{b}{6}t_C^3-\frac{\lambda}{2}t_C^2)+((-at_Bt_C-\frac{b}{2}t_B^2t_C)+$$
$$(Pt_At_C-at_At_C-\frac{b}{2}t_A^2t_C-\lambda t_At_C))-((\frac{p}{2}t_B^2-\frac{a}{2}t_B^2-\frac{b}{6}t_B^3-\frac{\lambda}{2}t_B^2)+$$
$$((-at_B^2-\frac{b}{2}t_B^3)+(Pt_At_B-at_At_B-\frac{b}{2}t_A^2t_B-\lambda t_At_B)))+$$
$$(h\times(((\frac{p_1}{2}t_D^2-\frac{a}{2}t_D^2-\frac{b}{6}t_D^3)+((Pt_Ct_D-at_Ct_D-\frac{b}{2}t_C^2t_D-\lambda t_Ct_D))$$
$$+((-at_Bt_D-\frac{b}{2}t_B^2t_D))+(Pt_At_D-at_At_D-\frac{b}{2}t_A^2t_D-\lambda t_At_D)))-$$
$$(((\frac{p_1}{2}t_C^2-\frac{a}{2}t_C^2-\frac{b}{6}t_C^3)+((Pt_C^2-at_C^2-\frac{b}{2}t_C^3-\lambda t_C^2))+$$
$$((-at_Bt_C-\frac{b}{2}t_B^2t_C))+(Pt_At_C-at_At_C-\frac{b}{2}t_A^2t_C-\lambda t_At_C))))+$$
$$(h\times(((-\frac{a}{2}t_E^2-\frac{b}{6}t_E^3)+((P_1t_Dt_E-at_Dt_E-\frac{b}{2}t_D^2t_E))+$$
$$((Pt_Ct_E-at_Ct_E-\frac{b}{2}t_C^2t_E-\lambda t_Ct_E))+((-at_Bt_E-\frac{b}{2}t_B^2t_E))+$$
$$(Pt_At_E-at_At_E-\frac{b}{2}t_A^3t_E-\lambda t_At_E)))-(((-\frac{a}{2}t_D^2-\frac{b}{6}t_D^3)$$
$$+(P_1t_D^2-at_D^2-\frac{b}{2}t_D^3))+((Pt_Ct_D-at_Ct_D-\frac{b}{2}t_C^2t_D-\lambda t_Ct_D))$$
$$+((-at_Bt_D-\frac{b}{2}t_B^2t_D))+(Pt_At_D-at_At_D-\frac{b}{2}t_A^3t_D-\lambda t_At_D))))+$$
$$(h\times((\frac{t\times\lambda t}{2})+(t_r\times\lambda t)+(\frac{(\lambda t+\lambda t_1)\times(t_1-t)}{2})))+(h_1\times(\frac{Pt_2'}{2}t_2'))$$

محاسبه هزینه کل در حالت دوم. در این حالت خرابی ماشین بعد از زمان تولید بررسی می‌شود. در این حالت ماشین بدون خرابی و بدون وقفه تا پایان زمان تولید، فعالیت خود را انجام می‌دهد. پس از پایان تولید، دوباره‌کاری شروع می‌شود و تا زمان (t_G) ادامه می‌یابد؛ سپس تا انتهای دوره (t_H) فقط تقاضا وجود دارد. شکل‌های ۳ و ۴، به‌ترتیب سطح موجودی محصول نهایی و محصولات معیوب را در طول یک دوره نشان می‌دهند.



شکل ۳. نمودار تغییرات سطح موجودی حالت دوم

شکل ۳، تغییرات سطح موجودی محصولات تولیدشده در حالت دوم را نشان می‌دهد در این حالت خرابی ماشین رخ نمی‌دهد، تولید محصول از زمان صفر شروع می‌شود و تا زمان t_F ادامه خواهد داشت. بعد از آن دوباره‌کاری محصولات معیوب شروع می‌شود و تا زمان t_G ادامه خواهد داشت و بعد از تولید صورت نگرفته و تا اتمام موجودی، محصولات تولید با نرخ $d(t)$ به فروش می‌رسند. شکل ۴، میزان محصولات معیوب تولیدی در حالت دوم را نشان می‌دهد. در زمان تولید محصولات معیوب با نرخ λ تولید می‌شوند و بعد از فرآیند تولید و تعیین میزان ضایعات بر اساس بازرسی محصولات، دوباره‌کاری محصولات معیوب شروع می‌شود که دوباره‌کاری به‌اندازه t_2 واحد زمانی به طول می‌انجامد.



شکل ۴. نمودار تغییرات سطح موجودی تعداد محصولات معیوب در حالت دوم

در شروع برنامه‌ریزی، میزان موجودی دردسترس برابر صفر است، ماشین در بازه $[0, t_F]$ شروع به تولید می‌کند و هم‌زمان با تولید، تقاضایی برابر با $d(t)$ به سیستم وارد می‌شود؛ همچنین حین تولید درصد ثابتی از محصولات معیوب می‌شوند؛ بنابراین تغییرات سطح موجودی نسبت به زمان به‌صورت رابطه ۲۷، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial I_1(t)}{\partial t} = P - d(t) - \lambda \qquad 0 \le t \le t_F$$ رابطه (۸)

با توجه به اینکه مقدار موجودی اول دوره برابر صفر است $(I_1(0) = 0)$، مقدار سطح موجودی در این حالت به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_1(t) = Pt - at - \frac{b}{2}t^2 - \lambda t$$ رابطه (۹)

در بازه دوم $[t_F, t_G]$ محصولات معیوب با نرخ P_1 دوباره‌کاری می‌شوند و حین دوباره‌کاری تقاضا واردشده به سیستم نیز برآورد می‌شود. در این صورت تغییرات سطح موجودی نسبت به زمان در این بازه به‌صورت رابطه ۲۹، محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial I_2(t)}{\partial t} = P_1 - d(t) \qquad t_F \le t \le t_G$$ رابطه (۱۰)

با توجه به شرط اولیه $I_4(t_c) = I_3(t_c)$ معادله دیفرانسیل رابطه ۲۹، سطح موجودی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_2(t) = (P_1 t - at - \frac{b}{2}t^2) + (Pt_F - at_F - \frac{b}{2}t_F^2 - \lambda t_F)$$ رابطه (۳۰)

در بازه سوم، فقط تقاضا وجود دارد و تغییرات سطح موجودی نسبت به زمان آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial I_3(t)}{\partial t} = -d(t) \qquad t_G \le t \le t_H$$ رابطه (۳۱)

با توجه به شرط اولیه $(t_G) = I_2(t_G)$ سطح موجودی در این حالت به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_3(t) = (-at - \frac{b}{2}t^2) + (P_1 t_G - at_G - \frac{b}{2}t_G^2) + (pt_F - at_F - \frac{b}{2}t_F^2 - \lambda t_F)$$
$$t_G \le t \le t_H$$

رابطه (۳۲)

حجم تولید در هر دوره به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = t_1.P$$

رابطه (۳۳)

محاسبه طول دوره در حالت دوم

طول هر دوره در این حالت با T نشان داده می‌شود و بر اساس مطالب بیان‌شده روابط زیر برقرار است.

$$t_F = t_1$$

رابطه (۱۱)

$$t_G = t_1 + \frac{\lambda t_1(1-\theta)}{p_1}$$

رابطه (۱۲)

$$I_3(t_H) = 0 \Rightarrow t_H = \frac{1}{b}(-a + \sqrt{(a^2 + 2b(-2at_1 + Pt_1 - \theta\lambda t_1 - \frac{a\lambda t_1}{P_1} + \frac{a\theta\lambda t_1}{P_1}}$$
$$+P_1 t_1 - bt_1^2 - \frac{b\lambda^2 t_1^2}{2P_1^2} + \frac{b\theta\lambda^2 t_1^2}{P_1^2} - \frac{b\theta^2\lambda^2 t_1^2}{2P_1^2} - \frac{b\lambda t_1^2}{P_1} + \frac{b\theta\lambda t_1^2}{P_1})))$$

رابطه(۱۳)

$$T = t_H$$

رابطه(۱۴)

محاسبه هزینه نگهداری در حالت دوم. با توجه به اینکه سطوح موجودی به‌دست‌آمده در تمامی بازه‌ها، متغیر و وابسته به زمان هستند، هزینه نگهداری هر یک از سطوح به‌صورت رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید.

ـ هزینه نگهداری در بازه اول:

$$h \times \int_0^{t_F} I_1(t)dt = h \times (\frac{P}{2}t_F^2 - \frac{a}{2}t_F^2 - \frac{b}{6}t_F^3 - \frac{\lambda}{2}t_F^2)$$

رابطه (۱۵)

ـ هزینه نگهداری در بازه دوم:

$$h\times\int_{t_F}^{t_G} I_2(t)dt = h\times((\frac{p_1}{2}t_G^2-\frac{a}{2}t_G^2-\frac{b}{6}t_G^3)+(Pt_Ft_G-at_Ft_G-\frac{b}{2}t_F^2t_G-\lambda t_Ft_G))$$
$$-((\frac{p_1}{2}t_F^2-\frac{a}{2}t_F^2-\frac{b}{6}t_F^3)+(Pt_F^2-at_F^2-\frac{b}{2}t_F^3-\lambda t_F^2))$$

رابطه (۱۶)

ـ هزینه نگهداری در بازه سوم:

$$h\times\int_{t_G}^{t_H} I_3(t)dt = ((-\frac{a}{2}t_H^2-\frac{b}{6}t_H^3)+(P_1t_Gt_H-at_Gt_H-\frac{b}{2}t_G^2t_H)+(Pt_Ft_H-at_Ft_H-\frac{b}{2}t_F^2t_H-\lambda t_Ft_H))$$
$$-((-\frac{a}{2}t_G^2-\frac{b}{6}t_G^3)+(P_1t_G^2-at_G^2-\frac{b}{2}t_G^3)+(Pt_Ft_G-at_Ft_G-\frac{b}{2}t_F^2t_G-\lambda t_Ft_G))$$

رابطه (۴۰)

ـ هزینه نگهداری محصولات معیوب با توجه به شکل ۴:

$$(h\times(\frac{t_1\times\lambda t_1\times(1-\theta)}{2}))$$

رابطه (۱۷)

ـ هزینه نگهداری برای هر مورد دوباره‌کاری برابر h_1 است؛ بنابراین هزینه نگهداری دوباره‌کاریِ تمام محصولات معیوب به‌صورت رابطه ۴۲، است. با توجه به شکل ۳، داریم:

$$(h_1\times\frac{P_1t_1}{2}t_2)$$

رابطه (۴۲)

با توجه به تمامی روابطی که ذکر شد، درنهایت هزینه کل برای حالت دوم به‌صورت رابطه ۴۳، محاسبه می‌شود.

$$TC_2=(C\times t_1\times P)+K+(C_R\times t_1\times P\times X\times(1-\theta))+(C_S\times t_1\times P\times X\times\theta)$$
$$+(h\times(\frac{p}{2}t_F^2-\frac{a}{2}t_F^2-\frac{b}{6}t_F^3-\frac{\lambda}{2}t_F^2))+(h\times(\frac{t_1\times\lambda t_1\times(1-\theta)}{2}))+(h_1\times\frac{P_1t_1}{2}t_2)$$
$$+h\times((\frac{p_1}{2}t_G^2-\frac{a}{2}t_G^2-\frac{b}{6}t_G^3)+(Pt_Ft_G-at_Ft_G-\frac{b}{2}t_F^2t_G-\lambda t_Ft_G))-$$
$$((\frac{p_1}{2}t_F^2-\frac{a}{2}t_F^2-\frac{b}{6}t_F^3)+(Pt_F^2-at_F^2-\frac{b}{2}t_F^3-\lambda t_F^2))$$
$$+(h\times((-\frac{a}{2}t_H^2-\frac{b}{6}t_H^3)+(P_1t_Gt_H-at_Gt_H-\frac{b}{2}t_G^2t_H)+$$
$$(Pt_Ft_H-at_Ft_H-\frac{b}{2}t_F^2t_H-\lambda t_Ft_H))-((-\frac{a}{2}t_G^2-\frac{b}{6}t_G^3)$$
$$+(P_1t_G^2-at_G^2-\frac{b}{2}t_G^3)+(Pt_Ft_G-at_Ft_G-\frac{b}{2}t_F^2t_G-\lambda t_Ft_G))$$

رابطه (۴۳)

محاسبه مقدار متوسط هزینه کل. همان‌طور که قبلاً بیان شد، مسئله موردبررسی در دو حالت ممکن برای خرابی ماشین در نظر گرفته شده است: در حالت نخست، ماشین در حین تولید خراب می‌شود و در حالت دوم خرابی ماشین بعد اتمام تولید رخ می‌دهد. با توجه به احتمالی‌بودن زمان خرابی ماشین، هر یک از این حالات با یک احتمالی رخ می‌دهند؛ بنابراین مقدار متوسط هزینه کل در هر دوره به‌صورت رابطه ۴۴، به‌دست می‌آید.

$$E\left[TCU\right]=\left\{\int_0^{t_1}E\left[TC_1(t_1)\right]f\ (t)dt+\int_{t_1}^{\infty}E\left[TC_2(t_1)\right]f\ (t)dt\right\} \qquad \text{رابطه (۱۸)}$$

مقدار متوسط هزینه در طول هر دوره طبق رابطه ۴۰، قابل‌محاسبه است. در ادامه مقدار هزینه کل در واحد زمان محاسبه می‌شود. برای تعیین هزینه کل در واحد زمان، باید ابتدا مقدار متوسط طول هر دوره محاسبه شود. با توجه به احتمالی‌بودن خرابی ماشین، طول دوره نیز به زمان خرابی ماشین وابسته است؛ بنابراین می‌توان مقدار متوسط طول هر دوره را مطابق با رابطه ۴۱، تعیین کرد.

$$E\left[T\right]=\int_0^{t_1}E\left[T'\right]f\ (t)dt+\int_{t_1}^{\infty}E\left[T\right]f\ (t)dt \qquad \text{رابطه (۱۹)}$$

با محاسبه رابطه ۴۵، متوسط زمان در هر دوره به‌صورت رابطه ۴۶، محاسبه می‌شود.

$$E\left[T\right]=\frac{\gamma+\beta\eta-e^{-\beta t_1}\left(\gamma+\beta\eta t_1\right)}{\beta}+t_H\ \ e^{-\beta t_1} \qquad \text{رابطه (۲۰)}$$

بر اساس روابط ۴۴ و ۴۶، مقدار متوسط هزینه کل در واحد زمان به‌صورت $E\left[TCU\right]/E\left[T\right]$ قابل‌محاسبه است.

روش حل مسئله. برای حل مسئله بیان‌شده از مفاهیم بهینگی استفاده می‌شود. به این منظور از مقدار متوسط هزینه کل در واحد زمان نسبت به متغیر تصمیم مسئله دو بار مشتق گرفته می‌شود و بر اساس شرایط بهینگی، اگر مشتق دوم نامنفی باشد، تابع هزینه کل محدب است و در این‌صورت می‌توان مقدار بهینه متغیر تصمیم را با برابر صفر قراردادن مشتق اول تعیین کرد. در این مسئله با توجه به تابع غیرخطی پیچیده و نمایی، بهینگی به‌صورت گرافیکی و بر اساس

مثال عددی بررسی می‌شود. در مبانی نظری موضوع نیز از این روش در بهینه‌سازی مسائل موجودی استفاده شده است. برای مثال، در صفحه ۱۴ «کتاب بهینه‌سازی و مدیریت موجودی»، مدل کنترل موجودی برای کالای فاسدشدنی به‌دلیل غیرخطی‌بودن تابع هدف، محدب‌بودن را به‌صورت گرافیکی در نظر گرفته است [۱۹]. باوجوداین در پژوهش حاضر، مشتق مرتبه اول و دوم محاسبه شده است و با توجه به اینکه تابع هزینه کل، مشتق اول و مشتق دوم بسیار طولانی و دارای پارامترهای زیادی می‌باشد، سعی شده است که بهینگی مسئله بر اساس مثال‌های مختلف بررسی شود. برای این منظور یک مثال عددی تعریف و شرط محدب‌بودن بررسی می‌شود و با درنظرگرفتن شرط بهینگی، جواب بهینه مسئله موردنظر تعیین می‌شود.

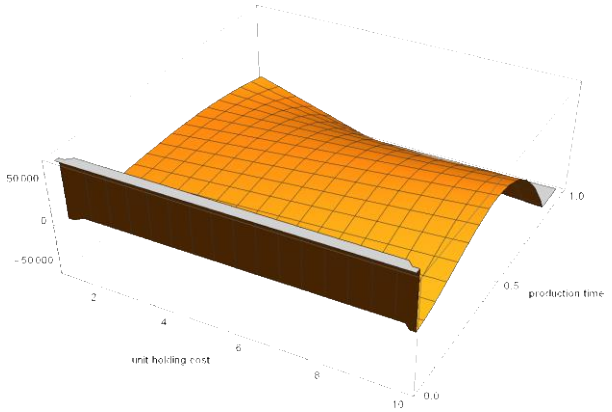
۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

یک شرکت تولیدی، محصولی را با نرخ P=10000 واحد در سال تولید می‌کند و میزان تقاضا برای این محصول از تابع $500 - 2 \times t$ پیروی می‌کند. نرخ تولید قطعات معیوب برابر $\lambda =$ 20 است. بر اساس تحلیل انجام‌شده از بررسی‌های قبلی در میان محصولات معیوب، ۱۰ درصد از محصولات معیوب قابل‌بازیافت نیستند. به‌علاوه، ماشین در سیستم تولید نیز به‌صورت تصادفی دچار خرابی می‌شود و از توزیع نمایی با میانگین $\beta = 2$ در هر سال پیروی می‌کند؛ همچنین در زمان بروز نقص برای ماشین از سیاست AR استفاده می‌شود و هزینه تعمیر ماشین M=500 و مدت‌زمان تعمیر ماشین $t_r = 2$ (دو روز) در نظر گرفته شده است.

فرایند دوباره‌کاری با اتمام فرایند تولید معمولی با نرخ دوباره‌کاری $P_1 = 9000$ واحد در سال شروع می‌شود. هزینه دوباره‌کاری هر واحد $C_R = 0.5$، هزینه نگهداری هر واحد دوباره‌کاری $h_1 = 0.6$ و هزینه دورریز محصولات بازیافت‌نشده $C_S = 0.3$ در نظر گرفته شده است. در این مسئله هزینه تولید برای هر واحد C=2، هزینه ثابت راه‌اندازی K=450 و هزینه نگهداری برای هر واحد محصول سالم برابر ۰/۶ در سال در نظر گرفته شده است.

پاسخ. در این مسئله، مشتق دوم بزرگ‌تر و مساوی صفر قرار داده شده است که در صورت حصول این نتیجه بر اساس اصل بهینگی، تابع محدب خواهد بود. برای مثال بیان‌شده با بزرگ‌تر و مساوی صفر قراردادن مشتق دوم، نتیجه $t_1 \leq 0.171$ حاصل شده است؛ بنابراین مسئله موردنظر زمانی که مدت‌زمان تولید در بازه $[0, 0.171]$ باشد، تابع محدب است. در قدم دوم با برابر صفر قراردادن مشتق اول مقدار بهینه مدت‌زمان تولید برابر 0.0369 به‌دست آمده است. به همین منظور، این مقدار در بازه محدب‌بودن صادق است؛ بنابراین مقدار بهینه نهایی است. با جایگذاری مقدار مدت‌زمان تولید بهینه، هزینه کل موردانتظار بهینه در هر واحد زمان

$E[TCU(t_1^*)] = 1229.9294$ به‌دست می‌آید. تغییرات تابع هدف نسبت به مدت‌زمان تولید و هزینه نگهداری در شکل ۵، مشاهده می‌شود.



شکل ۵. نمودار تابع هدف نسبت به مدت‌زمان تولید و هزینه نگهداری

در ادامه برای تحلیل حساسیت پارامترهای اصلی مسئله، مقادیر آن‌ها تغییر داده می‌شود و بر اساس آن، مقدار بهینه متغیرهای تصمیم تعیین می‌شود. هدف از این کار تحلیل داده‌های مسئله در صورت تغییرات احتمالی داده‌های مسئله است تا مدیریت واحد صنعتی بتواند تحت شرایط مختلف تصمیم مناسب را اتخاذ کند.

تحلیل حساسیت مثال بیان‌شده. در این بخش به تحلیل حساسیت مسئله پرداخته می‌شود. به این منظور، پارامترهای مسئله تغییر داده می‌شود و تغییرات شرط محدب‌بودن، مقدار بهینه، مدت‌زمان تولید و مقدار هزینه کل بررسی می‌شود.

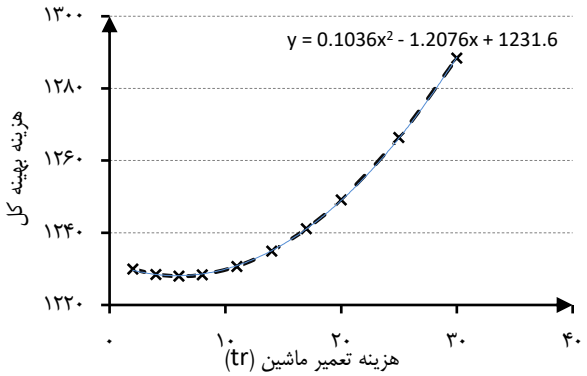
تحلیل حساسیت پارامتر مدت‌زمان تعمیر ماشین (t_r). در این قسمت مدت‌زمان تعمیر ماشین از ۲ تا ۳۰ روز تغییر داده شده و نتایج در جدول ۲، آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد هزینه کل در ابتدا دارای روند تقریباً ثابتی است؛ سپس روند افزایشی نمایی دارد (شکل ۶).

می‌توان روند تغییرات هزینه کل را بر اساس یک تابع نمایی تخمین زد که بر اساس آن مدیر واحد تولیدی بتواند برآوردی از روند تغییرات هزینه کل سیستم در صورت ادامه زمان تعمیر ماشین داشته باشد. تخمین تابع تغییرات هزینه کل نسبت زمان تعمیر در شکل ۶، مشخص شده است؛ همچنین با افزایش زمان تعمیر زمان تولید کاهش یافته است. علت اصلی این امر افزاش هزینه کل است. برای کاهش هزینه کل در واحد زمان میزان تولید هر دوره کاهش داده می‌شود و این امر باعث کاهش دوره تولید و درنتیجه مدت‌زمان تولید خواهد شد (شکل ۷). روند کاهش

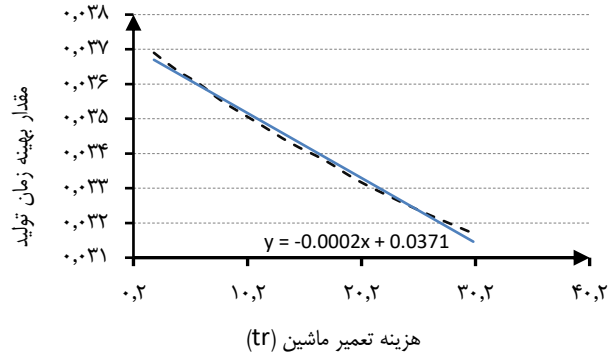
زمان تولید هر دوره نسبت به افزایش زمان تعمیر تقریباً خطی است و تخمین رابطه آن در شکل ۷، آورده شده است که بر اساس آن مدیر واحد تولیدی بتواند برآوردی از روند تغییرات زمان تولید هر دوره در صورت ادامه زمان تعمیر ماشین داشته باشد.

جدول ۲. تحلیل حساسیت پارامتر مدت‌زمان تعمیر ماشین (t_r)

#	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
زمان تعمیر (روز)	۲	۴	۶	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰	۲۵	۳۰
شرط محدب بودن	$t_1 \leq 0/171$	$t_1 \leq 0/167$	$t_1 \leq 0/164$	$t_1 \leq 0/161$	$t_1 \leq 0/157$	$t_1 \leq 0/153$	$t_1 \leq 0/149$	$t_1 \leq 0/145$	$t_1 \leq 0/140$	$t_1 \leq 0/135$
t_1 بهینه	۰.۰۳۶۹	۰.۰۳۶۴	۰.۰۳۶۰	۰.۰۳۵۵	۰.۰۳۴۹	۰.۰۳۴۳	۰.۰۳۳۸	۰.۰۳۳۲	۰.۰۳۲۴	۰.۰۳۱۷
هزینه بهینه	۱۲۲۹/۹۲۳۴	۱۲۲۸/۴۸۳۴	۱۲۲۷/۹۷۸۶	۱۲۲۸/۳۹۵۳	۱۲۳۰/۷۰۵۵	۱۲۳۴/۹۸۰۲	۱۲۴۱/۱۵۶۵	۱۲۴۹/۱۷۳۰	۱۲۶۶/۴۶۲۱	۱۲۸۸/۳۳۸



شکل ۶. *نمودار هزینه بهینه کل به مدت‌زمان تعمیر ماشین*

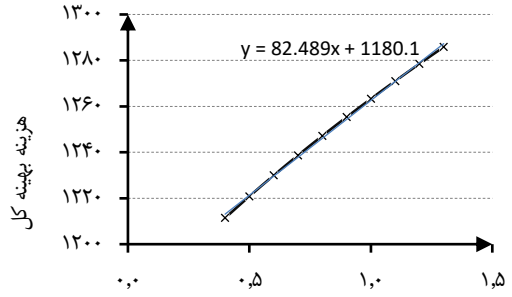


شکل ۷. نمودار مقدار بهینه زمان تولید به مدت‌زمان تعمیر ماشین

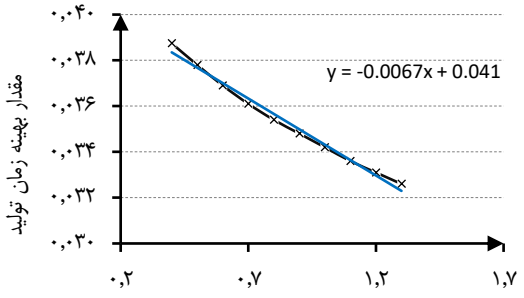
تحلیل حساسیت پارامتر هزینه نگهداری (h). در این قسمت هزینه نگهداری هر واحد محصول در واحد زمان از ۰/۴ تا ۱/۳ تغییر داده شده و نتایج در جدول ۳، آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش هزینه نگهداری هر واحد محصول، کل هزینه‌های سیستم افزایش می‌یابد (شکل ۸)؛ درنتیجه برای کاهش هزینه کل در واحد زمان، میزان تولید هر دوره کاهش می‌یابد و این امر باعث کاهش دوره تولید و درنتیجه مدت‌زمان تولید می‌شود (شکل ۹). روند تغییرات هزینه کل و همچنین زمان بهینه تولید نسبت به تغییرات هزینه نگهداری هر واحد محصول به‌صورت خطی است و رابطه روند تغییرات آن در شکل ۸، آورده شده است. این روند به مدیر واحد تولیدی کمک می‌کند که در صورت تغییر هزینه نگهداری هر واحد یا در صورت تغییر قیمت هر خرید محصول، روند تغییرات هزینه به چه صورت است.

جدول ۳. تحلیل حساسیت پارامتر هزینه نگهداری (h)

#	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
هزینه نگهداری	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
شرط محدب بودن	$t_1 \leq 0/145$	$t_1 \leq 0/158$	$t_1 \leq 0/171$	$t_1 \leq 0/181$	$t_1 \leq 0/188$	$t_1 \leq 0/194$	$t_1 \leq 0/198$	$t_1 \leq 0/202$	$t_1 \leq 0/205$	$t_1 \leq 0/208$
t_1 بهینه	۰ /۰۳۸۷۴	۰/۰۳۷۸	۰/۰۳۶۹	۰/۰۳۶۱	۰/۰۳۵۴	۰/۰۳۴۸	۰/۰۳۴۲	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۳۱	۰/۰۳۲۶
هزینه بهینه	۱۲۱۱/۴۰۰۹	۱۲۲۰/۸۵۰۸	۱۲۲۹/۹۲۹۴	۱۲۳۸/۶۷۹۵	۱۲۴۷/۱۳۴۹	۱۲۵۵/۳۳۴۲	۱۲۳۶/۲۷۱۵	۱۲۷۰/۹۹۷۴	۱۲۷۸/۵۱۹۶	۱۲۸۵/۸۵۳۵



شکل ۸. نمودار هزینه بهینه کل به هزینه نگهداری هر واحد

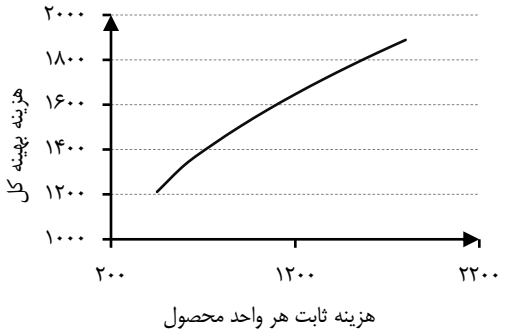


شکل ۹. نمودار مقدار بهینه زمان تولید به هزینه نگهداری هر واحد

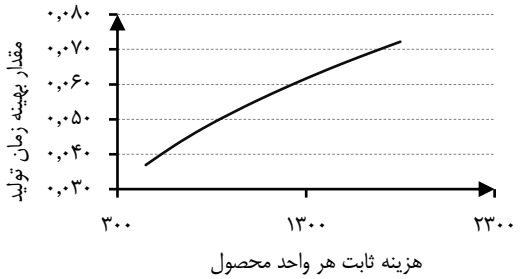
تحلیل حساسیت پارامتر هزینه ثابت (K). در این قسمت هزینه ثابت از ۴۵۰ تا ۱۸۰۰ تغییر داده شده و نتایج در جدول ۴، آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش هزینه ثابت، کل هزینه‌های سیستم افزایش می‌یابد (شکل (۱۰)؛ درنتیجه برای کاهش هزینه کل در واحد زمان میزان تولید هر دوره را افزایش داده می‌شود و این امر باعث افزایش دوره تولید و درنتیجه مدت‌زمان تولید خواهد شد (شکل ۱۱).

جدول ۴. تحلیل حساسیت پارامتر هزینه ثابت (K)

#	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
K	۴۵۰	۶۰۰	۷۵۰	۹۰۰	۱۰۵۰	۱۲۰۰	۱۳۵۰	۱۵۰۰	۱۶۵۰	۱۸۰۰
شرط محدب بودن	$t_1 \leq 0/171$	$t_1 \leq 0/177$	$t_1 \leq 0/183$	$t_1 \leq 0/188$	$t_1 \leq 0/192$	$t_1 \leq 0/196$	$t_1 \leq 0/200$	$t_1 \leq 0/205$	$t_1 \leq 0/207$	$t_1 \leq 0/209$
t_1 بهینه	۰/۰۳۶۵	۰/۰۴۲۴	۰/۰۴۷۳	۰/۰۵۱۶	۰/۰۵۵۶	۰/۰۵۹۳	۰/۰۶۲۸	۰/۰۶۶۱	۰/۰۶۹۲	۰/۰۷۲۲
هزینه بهینه	۱۲۱۱/۴۰۰	۱۳۳۱/۵۶۴۸	۱۴۲۱/۲۲۹۷	۱۵۰۲/۳۷۹۰	۱۵۷۷/۰۶۶۴	۱۶۴۶/۶۳۰۷	۱۷۱۲/۰۰۲۶	۱۷۷۳/۸۶۰۱	۱۸۳۲/۷۱۵۴	۱۸۸۸/۹۶۶۵



شکل ۱۰. نمودار هزینه بهینه کل به هزینه ثابت K



شکل ۱۱. نمودار مقدار بهینه زمان تولید به هزینه ثابت K

تحلیل حساسیت پارامتر نرخ تولید قطعات (P) و نرخ دوباره‌کاری (P_1). در این قسمت نرخ تولید قطعات از ۵۰۰۰ تا ۱۴۰۰۰ و نرخ دوباره‌کاری به تبعیت از نرخ تولید از ۴۰۰۰ تا ۱۳۰۰۰ تغییر داده شده‌اند و نتایج در جدول ۵، آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش نرخ تولید قطعات و نرخ دوباره‌کاری، کل هزینه‌های سیستم افزایش می‌یابد؛ درنتیجه برای کاهش هزینه کل در واحد زمان میزان تولید هر دوره کاهش داده می‌شود و این امر باعث کاهش دوره تولید و درنتیجه مدت‌زمان تولید می‌شود.

جدول ۵. تحلیل حساسیت پارامتر نرخ تولید قطعات (P) و نرخ دوباره‌کاری (P_1)

#	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
P	۵۰۰۰	۶۰۰۰	۷۰۰۰	۸۰۰۰	۹۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۱۰۰۰	۱۲۰۰۰	۱۳۰۰۰	۱۴۰۰۰
P_1	۴۰۰۰	۵۰۰۰	۶۰۰۰	۷۰۰۰	۸۰۰۰	۹۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۱۰۰۰	۱۲۰۰۰	۱۳۰۰۰
شرط محدب بودن	$t_1 \leq 0/221$	$t_1 \leq 0/205$	$t_1 \leq 0/193$	$t_1 \leq 0/184$	$t_1 \leq 0/177$	$t_1 \leq 0/171$	$t_1 \leq 0/166$	$t_1 \leq 0/162$	$t_1 \leq 0/158$	$t_1 \leq 0/155$
t_1 **بهینه**	۰/۰۸۴۹	۰/۰۶۷۲	۰/۰۵۵۷	۰/۰۴۷۶	۰/۰۴۱۶	۰/۰۳۶۹	۰/۰۳۳۲	۰/۰۳۰۱	۰/۰۲۷۶	۰/۰۲۵۵
هزینه بهینه	۱۲۱۱/۲۷۰۴	۱۲۱۴/۷۷۸۲	۱۲۱۸/۹۲۰۶	۱۲۲۳/۸۸۲۷	۱۲۲۹/۹۲۹۴	۱۲۳۷/۴۵۳۶	۱۲۴۷/۰۶۳۵	۱۲۵۹/۷۵۳۶	۱۲۷۷/۲۶۸۸	۱۳۰۲/۹۶۲۴

با توجه به تجزیه‌وتحلیل انجام‌شده در این بخش، مشخص است مدت‌زمان تعمیر تأثیر زیادی بر هزینه‌های کل سیستم دارد و افزایش آن باعث افزایش هزینه سیستم به‌صورت نمایی می‌شود؛ بنابراین پیشنهاد می‌شود که واحد نگهداری و تعمیرات شرکت باید برنامه‌ریزی دقیق برای تعمیرات دستگاه انجام دهد و از مواردی که باعث تأخیر در تعمیر ماشین می‌شود، اجتناب کند. برای مثال باید حتماً مدیریت موجودی قطعات مصرفی ماشین و همچنین قطعات در معرض شکست به‌درستی صورت گیرد و برنامه‌ای دقیق برای تعمیرات اصلاحی دستگاه اتخاذ شود تا از تأخیرهای احتمالی تعمیر آن جلوگیری به عمل آید.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش یک سیستم تولیدی تک‌ماشینی با نرخ تولید ثابت بررسی شد. در سیستم موردبررسی، فرض شده است که امکان تولید محصولات معیوب وجود دارد؛ به‌طوری‌که تعدادی از این محصولات معیوب قابلیت بازیافت را دارند؛ همچنین در حین تولید احتمال خرابی ماشین‌آلات به‌صورت تصادفی وجود دارد. به‌علت تصادفی درنظرگرفتن احتمال خرابی، دو حالت ممکن است به‌وجود آید: در حالت نخست ممکن است که خرابی ماشین در حین تولید اتفاق بیفتد و یا در حالت دوم، خرابی ماشین بعد از زمان تولید باشد. بر اساس هر یک از حالاتی که رخ دهد، هزینه‌های مختص به هر حالت ایجاد می‌شود. ابتدا مدل‌سازی برای محاسبه هزینه بر اساس هر یک از حالات بیان‌شده صورت می‌گیرد؛ سپس با توجه به احتمالی‌بودن هر یک از حالات با درنظرگرفتن توزیع احتمال مشخص برای رخ‌دادن هر حالت، متوسط هزینه‌ها در واحد زمان محاسبه می‌شود و درنهایت به کمک روش‌های بهینه‌سازی، مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم به‌دست می‌آید.

با توجه به موضوع موردبررسی در این پژوهش، از عوامل دیگری که می‌تواند تأثیر بسزایی در فرآیند تولید داشته باشد، نرخ تولید محصولات است. در این پژوهش فرض شده است که نرخ تولید ثابت است؛ اما عوامل مختلفی بر نرخ تولید محصول تأثیرگذار هستند. برای مثال، کیفیت مواد اولیه، نوع فناوری مورداستفاده و میزان مهارت نیروی انسانی، تأثیر زیادی بر نرخ تولید محصول دارند؛ بنابراین پیشنهاد می‌شود با توجه به شرایط، نرخ تولید با درنظرگرفتن موارد بیان‌شده به‌صورت متغیر در نظر گرفته شود؛ همچنین در پژوهش انجام‌شده زمان تعمیر ماشین ثابت فرض شده است؛ اما در عمل این زمان اصولاً متغیر و یا تصادفی است؛ به همین منظور، پیشنهاد می‌شود که مدل ریاضی موردبررسی با درنظرگرفتن متغیربودن زمان تعمیر موردتحلیل و سایر پارامترهای وابسته این پارامتر اندازه‌گیری و ارزیابی شود.

تعارض منافع. برای ارائه مطالب و نگارش این مقاله هیچ‌گونه کمک مالی از هیچ فرد، نهاد و سازمانی دریافت نشده است و نتایج و دستاوردهای این مقاله به نفع یا ضرر سازمان یا فردی خاص نخواهد بود. حضور نویسندگان در این پژوهش به عنوان شاهدی بی‌طرف ولی متخصص بوده است و نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منافعی ندارند.

منابع

1. Al-Salamah, M. (2019). Economic production quantity in an imperfect manufacturing process with synchronous and asynchronous flexible rework rates. *Operations research perspectives, (6),* 100103.
2. Asghar, I., B. Sarkar, & Kim, S. J. (2019). Economic analysis of an integrated production–inventory system under stochastic production capacity and energy consumption. *Energies, 12(16),* 3179.
3. Chang, H. C. (2013). An economic production quantity model with consolidating shipments of imperfect quality items: A note. *International Journal of Production Economics, 144(2),* 507-509.
4. Chiu, Y. S.P., Chen, K. K., Cheng, F. T. & Wu, M. F. (2010). Optimization of the finite production rate model with scrap, rework and stochastic machine breakdown. *Computers & mathematics with applications, 59(2),* 919-932.
5. Colledani, M. & Angius, A. (2019). Integrated production and reconfiguration planning in modular plug-and-produce production systems. *CIRP Annals, 68(1),* 435-438.
6. Dal Borgo, E., & Meneghetti, A. (2019). Production and shipment planning for Project Based Enterprises: Exploiting learning-forgetting phenomena for sustainable assembly of Curtain Walls. *Computers & Industrial Engineering, 131,* 488-501.
7. Fekri, M. (2019). Optimal run time for an EPQ model with scrap, rework, setup time and machine breakdown (failure) under learning effect assumption. arXiv preprint arXiv:1912.11263.
8. Groenevelt, H., L. Pintelon, & Seidmann, A. (1992). Production lot sizing with machine breakdowns. *Management Science, 38(1),* 104-123.
9. Hasanpour, J., Hasani, A., & Ghodoosi, M. (*2018*). Delayed Payment Policy in the Inventory Model of Deteriorating Goods with Quadratic Demand in Order to Backlogging Shortage. *Journal of Industrial Management Perspective, 7(4),* 199-230. (In Persian)
10. Ko, C. H. & Wang, S.-F. (2010). GA-based decision support systems for precast production planning. *Automation in construction, 19(7),* 907-916.
11. Liao, G. L. (2015). Production and maintenance policies for an EPQ model with perfect repair, rework, free-repair warranty, and preventive maintenance. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 46(8),* 1129-1139.
12. Rajabi, Z., Sadeghi, H., & Mahmoodi, A. (2020). Determining The Optimal Ordering Policy In A Multi-Period Stochastic Model With The Uncertainty Purchase Price. *Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems, 8(16),* 95-111.

13. Sadeghi, H. (2019). A forecasting system by considering product reliability, POQ policy, and periodic demand. *Journal of Quality Engineering and Production Optimization, 4(2),* 133-148.
14. Sadeghi, H. (2019). Optimal pricing and replenishment policy for production system with discrete demand. *International Journal of Industrial Engineering and Management Science, 6(2),* 37-50.
15. Sadeghi, H., Golpîra, H., & Khan, S.A.R. (2021). Optimal integrated production-inventory system considering shortages and discrete delivery orders. *Computers & Industrial Engineering, 156,* 107233.
16. Sadeghi, H., A. Mahmoodi, & Rajabi, Z. (2022). Economic Order Quantity with Discrete Demand and Delivery Orders. *Journal of Industrial Management Perspective, 12(2),* 113-133 (In Persian)
17. Sadeghi, H., Makui, A., & Heydari, M. (2016). Multilevel production systems with dependent demand with uncertainty of lead times. *Mathematical Problems in Engineering.*
18. Sarkar, B., Cárdenas-Barrón, L.E., Sarkar, M., & Singgih, M.L. (2014). An economic production quantity model with random defective rate, rework process and backorders for a single stage production system. *Journal of Manufacturing Systems, 33(3),* 423-435.
19. Sharma, A., Singh, C., Verma, P., & Malik, A. (2022). Flexible Inventory System of Imperfect Production Under Deterioration and Inflation. *Yugoslav Journal of Operations Research, 32(4),* 515-528.
20. Siemon, M., Schiffer, M., & Walther, G. (*2021*). Integrated purchasing and production planning for a non-Ferrous metal production network., *Omega, 98,* 102136.
21. Taheri, S.A., Mokhtari, H., & Fallahi, A. (2021). An Economic Production Quantity Model with Probabilistic Machine Breakdown and Multiple Shipments Policy. *Journal of Industrial Management Perspective, 11(4),* 223-252 (In Persian)
22. Taleizadeh, A.A., Cárdenas-Barrón, L.E., & Mohammadi, B. (2014). A deterministic multi product single machine EPQ model with backordering, scraped products, rework and interruption in manufacturing process. *International Journal of Production Economics, 150,* 9-27.
23. Taleizadeh, A.A., Soleymanfar, V.R., & Govindan, K. (2018). Sustainable economic production quantity models for inventory systems with shortage. *Journal of cleaner production, 174,* 1011-1020.
24. Wee, H.M. & Widyadana, G.A. (2013). A production model for deteriorating items with stochastic preventive maintenance time and rework process with FIFO rule. *Omega, 41(6),* 941-954.
25. Yang, L., Ma, C., Yang, Y., Zhang, E., & Lv, H. (2020). Estimating the regional eco-efficiency in China based on bootstrapping by-production technologies. *Journal of Cleaner Production, 243,* 118550.