Industrial Management Perspective

Print ISSN: 2251-9874, Online ISSN: 2645-4165
Volume 12, Serial Number 47, Autumn 2022, Pages 89-113 (Original Article)
DOI: 10.52547/JIMP.12.3.89

Optimal Control for Dynamic Pricing and Advertising of Ticket Selling for the Sport and Entertainment Events

Mohammad Reza Mehregan[*], Mohammad Hossein Pourkazemi[**], Mohammad Haghighi[***], Tooran Asefi

Abstract

This article is the result of a research project in dynamic pricing and advertising to determine the number of sale tickets for a sporting or an entertainment event. For this purpose, a dynamic optimal control model was used to maximize the organizer's profit. To provide the best estimate, all potential variables and costs in ticket sales were considered. These included free ticket transfers, food and beverage sales, promotional goods, insurance, and other services (e.g., customer service) to ticket buyers. Using a piecewise continuous function (arrival intensity) we applied variables that are not controlled by organizers (e.g., impacts of seasonal change on demand) to determine the number of tickets for sale (capacity planning) and their dynamic and optimal price, considering the dynamic optimal advertising costs. Among the strengths of this study is the application of two piecewise continuous functions to analyze the effect of unsold tickets numbers on customers' purchasing behavior. The impacts of such factors have not been studied in previous studies.

Keywords: Pricing; Advertising; Capacity Planning; Optimal Control; Pontryagin's maximum principle

---

Received: May. 31, 2020; Accepted: Des. 25, 2021.

* Professor, Tehran University.
** Associate professor, Shahid Beheshti University (Corresponding Author).
Email: h-pourkazemi@yahoo.com.au,
*** Associate Professor, Tehran University.
**** Ph.D Student, Kish campus of Tehran University.

چشم‌انداز مدیریت صنعتی
شاپای چاپی: ۹۸۷۴-۲۲۵۱، شاپای الکترونیکی: ۴۱۶۵-۲۶۴۵
سال دوازدهم، شماره ۴۷، پاییز ۱۴۰۱، ص‌ص ۸۹ – ۱۱۳ (**نوع مقاله: پژوهشی**)
DOI: 10.52547/JIMP.12.3.89

قیمت‌گذاری و تبلیغ پویا در فروش بلیت رخدادهای ورزشی و تفریحی با استفاده از کنترل بهینه

محمدرضا مهرگان*، محمدحسین پورکاظمی، محمد حقیقی***، توران آصفی****

چکیده

این مقاله حاصل پژوهشی درباره قیمت‌گذاری و تبلیغ پویا است و با استفاده از یک مدل کنترل بهینه، روشی برای تعیین تعداد بلیت برای فروش یک رویداد ورزشی یا تفریحی به‌دست می‌دهد تا سود برگزارکننده بیشینه شود؛ همچنین سعی شده است تا حد ممکن هزینه پشتیبانی در فروش بلیت این‌گونه رخدادها نظیر فروش غذا، نوشیدنی، کالاها، بیمه، امکان واگذاری رایگان بلیت و سایر خدمات به خریداران بلیت در نظر گرفته شود. این روش، علاوه بر تعیین تعداد بلیت‌ها برای فروش (برنامه‌ریزی ظرفیت)، تعیین قیمت پویای بهینه و درنظرگرفتن هزینه تبلیغ بهینه پویا، مواردی را که خارج از کنترل برگزارکنندگان است (به‌کمک تابع پیوسته ـ تکه‌ای به‌نام شدت ورود)، با اضافه‌کردن تابع تغییرات فصلی در تابع تقاضا، در مدل اعمال می‌کند. از دیگر نکات برجسته این پژوهش، استفاده از دو تابع پیوسته ـ تکه‌ای در مدل‌سازی کشش تبلیغ است. با این ترفند امکان تحلیل اثر تعداد بلیت‌های فروش‌نرفته بر رفتار خرید مشتریان، از طریق بروزکردن کشش تبلیغ در طول دوره فروش میسر می‌شود. در پژوهش های قبلی به این موارد کمتر پرداخته شده است.

کلیدواژه‌ها: قیمت‌گذاری؛ تبلیغ؛ برنامه‌ریزی ظرفیت؛ کنترل بهینه؛ اصل ماکزیمم پونتری اگین.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۳/۱۱، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۰۴.

* استاد، دانشگاه تهران
** دانشیار، دانشگاه شهید بهشتی (نویسنده مسئول).
Email: h_pourkazemi@yahoo.com.au
*** دانشیار، دانشگاه تهران.
**** دانشجوی دکتری، پردیس کیش دانشگاه تهران.

۱. مقدمه

دستیابی به بهترین نتایج برای شرایط داده‌شده را «بهینه‌سازی»[۱] می‌گویند. بهینه‌سازی در مدیریت، اقتصاد و مهندسی موضوعی مهم و پرکاربرد است. در عمل از ابزارهای ریاضی برای بهینه‌سازی استفاده می‌شود که آن را «مدلسازی» می‌نامند و نام‌های دیگر آن «بهینه‌سازی ریاضی» یا «برنامه‌ریزی ریاضی»[۲] است. بهینه سازی ریاضی به دو شاخه اصلی ایستا و پویا تقسیم می‌شود. در برنامه‌ریزی ایستا، متغیرها مستقل از زمان است [۸]؛ ولی در بهینه‌سازی پویا، متغیرها تابعی پیوسته یا گسسته از زمان هستند [۸]. بهینه‌سازی پویا در ریاضی و مهندسی سابقه‌ای سیصدساله دارد. در سال‌های پایانی قرن هفدهم، مسئله هم‌محیطی[۳] در ریاضیات مطرح شد که پایه مسئله کنترل بهینه امروزه است. در مسئله هم‌محیطی، هدف پیداکردن معادله منحنی‌ای است که دو سرش بین دو نقطه A و B، ثابت و طول آن معلوم و مساحت محصور بین آن و محور افقی، حداکثر باشد. ریاضیدانان بسیاری به حل این مسئله پرداخته‌اند. بالغ بر پنجاه سال طول کشید تا راه کلی این نوع مسائل، ابتدا توسط اویلر [۴] و سپس لاگرانژ [۵]، با ابداع شاخه جدیدی از ریاضیات موسوم به «روش حساب تغییرات»[۶] در دهه ۱۷۵۰–۱۷۶۰ به‌دست آمد [۱۴].

این بهینه‌سازی در رشته‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی از همان سال‌ها رواج یافت. جی سی‌اوانس[۷] اقتصاددان برای اولین بار در سال ۱۹۲۴، این مقوله را در اقتصاد به‌کار برد. او طی مقاله‌ای با عنوان «بهینه‌یابی پویای انحصارگر» که در مجله ماهیانه «ریاضیات امریکا» به چاپ رسید، به این موضوع پرداخت. وی در این مقاله، تابع تقاضا را برحسب متغیرهای قیمت، $p(t)$ و مشتق آن $p'(t)$ و تابع هزینه کل را بر حسب متغیر تولید، $q(t)$، تابعی پیوسته از زمان t در نظر گرفت. مسیر بهینه قیمت $p^*(t)$ را در فاصله زمانی $[t_0,T]$، چنان تعیین کرد تا سود انحصارگر بیشینه شود [۱۴]. در دهه ۱۹۵۰–۱۹۶۰ هم‌زمان با پرتاب قمر مصنوعی توسط روس‌ها به فضا و تعیین مسیرهای بهینه موشک‌ها و قمرهای مصنوعی، مسئله کنترل بهینه توسط ال.اس پونتری‌آگین[۸] دانشمند روسی تعریف و روش اصل ماکزیمم پونتری آگین برای حل ارائه شد. به دنبال آن ریچارد بلمن امریکائی[۹] روش برنامه ریاضی پویا را برای مسئله کنترل بهینه ارائه داد. مسئله قدیمی بهینه‌سازی پویا را در این زمان «کنترل بهینه لاگرانژ» نامیدند.

1. Optimization
2. Mathematical Programming
3. Isoperimetric
4. Leonhard Euler
5. Joseph-Louis Lagrange
6. Calculus Variation
7. G.C. Eveance: “The Dynamics of Monopoly”
8. Lve S. Pontryagin
۹. Richard Bellman

کاربرد مسائل کنترل بهینه در اقتصاد و مدیریت از سال ۱۹۶۲ در جهان متداول شد ، هم‌اکنون نیز کتابها و مقاله‌های متعددی در زمینه‌های مختلف آن موجود است [۱۴].

علاقه روزافزون مردم در قرن حاضر نسبت به فعالیت‌های سرگرم‌کننده، به‌ویژه ورزشی و تفریحی فوق‌العاده است. امروزه مردم، حاضر به هزینه‌کردن برای مشاهده سرگرمی‌ها و فعالیت‌های هنری، ورزشی و غیره هستند. به قول کلیما[۱] (۱۹۹۵)، «در گذشته بازیگران، اربابان خود را سرگرم می‌کردند، اما امروزه بازیگران ارباب هستند. این گواهی است بر جهان امروز که عمق حرص و ولع برای سرگرمی‌های مختلف هنری و ورزشی را نشان می‌دهد» [۱۱]. در باب اهمیت و جایگاه مهم فعالیت‌های ورزشی می‌توان به فوتبال اشاره کرد که طرفداران آن طیفی از همه طبقات اجتماعی فارغ از جنس و سن هستند. کوپر[۲] (۲۰۰۶)، می‌نویسد «کسی نمی‌داند طرفداران فوتبال چه تعدادند. وقتی یک بازی برای میلیاردها نفر اهمیت پیدا می‌کند، فقط یک بازی نیست. این ورزش، جنگ به‌وجود می‌آورد، انقلاب می‌کند و مورد توجه مافیاها و دیکتاتورها است» [۱۲]. طبق آمار رسانه‌های ورزش و سرگرمی[۳] سه میلیارد و پانصد و هفتاد دو میلیون نفر در سراسر دنیا بازی‌های فوتبال جام جهانی ۲۰۱۸ را تماشا کردند. این آمار معادل کمی بیش از ۵۱ درصد جمعیت جهان است. نزدیک به دو و نیم میلیون بلیت در این بازی‌ها فروخته شد.

مشتریان در بیشتر موارد به قیمت حساسیت دارند. قیمت مقدار پولی است که مشتری یا خریدار برای تصاحب یک کالا یا استفاده از یک خدمت و یا ترکیبی از کالا، ارزش‌ها و خدمات همراه آن به عرضه‌کننده یا فروشنده می‌پردازد. هزینه‌یابی و قیمت‌گذاری یکی از عملیات‌های مهم بازاریابی است که همراه سه فعالیت دیگر، چهار رکن اصلی بازاریابی را تشکیل می‌دهد. چهار رکن اصلی بازاریابی، یعنی کالا، قیمت، توزیع و ترفیع[۴] (فعالیت‌هایی که به‌وسیله بازاریابان برای آگاهی، متقاعدکردن و تشویق به خرید انجام می‌شود)، در مبانی نظری بازاریابی به «آمیخته بازاریابی»[۵] معروف است. هر مدیر یا مسئول بازاریابی باید به این چهار مقوله حساس باشد و با بررسی و پژوهش در این موارد نسبت به آن‌ها تصمیم‌گیری کند [۴].

قیمت‌گذاری بر پایه زمان، همواره نقش مهمی در مبانی نظری فروش داشته است. به دنبال توسعه و به‌کارگیری فعالیت‌های مبتنی بر رایانه، مثل سیستم‌های قیمت‌گذاری، ذخیره و خرید اینترنتی، قیمت‌گذاری پویا در بسیاری از زمینه‌های تجاری وارد شده است. در زمینه کاربردی عام، قیمت‌گذاری پویا نخستین بار در دهه ۱۹۸۰ در فروش بلیت هواپیما برای بیشینه‌کردن سود با تعیین قیمت بلیت‌ها استفاده شد [۲۰].

۱. Kelima
۲. Kuper
۳. Public Media Sport & Entertainment –PMSE
۴. Promotion
۵. Marketing mix

در بخش خرده‌فروشی اینترنتی تقریبا ۹۵ درصد از ۵۰۰ بنگاه موفق خرده‌فروش در فیس بوک حضور دارند. بیش از ۹۰ درصد آن‌ها در توئیتر فعال هستند و بیش از ۷۵ درصد اقدام به ارسال پیام‌های بازرگانی، نمایش فیلم‌های تبلیغاتی و یا انواع فیلم‌ها از طریق یوتیوب می‌کنند [۱۳]. بررسی مزایای فناوری‌های دیجیتالی بسیار ارزشمند است؛ چون این مزایا باعث ایجاد نوآوری و حرکت پیوسته به سوی بیشینه‌سازی سود می‌شوند.

امروزه در ایران همانند سایر نقاط جهان، فعالیت‌های ورزشی و تفریحی، کنسرت موسیقی پاپ یا کلاسیک، اجرا[۱]‌های کمدی و نمایش خنده، تئاتر و سینما، مسابقات ورزشی نظیر فوتبال، کشتی، والیبال و غیره گسترش یافته است. در این مقاله برای سهولت کار و پوشش گستره وسیعی از تمامی این موارد، از واژه رخداد ورزشی ـ تفریحی استفاده شده است.

برگزارکنندگان رخدادهای ورزشی ـ تفریحی از طریق فروش بلیت و پرداخت هزینه‌هایی نظیر تبلیغات، سعی در حداکثرسازی سود خود دارند. مسئله اساسی در این پژوهش آن است که چه تعداد بلیت برای چنین رخدادهایی پیش‌بینی شود؟ قیمت پویای هر بلیت، با توجه به کلیه هزینه‌ها در طول زمان اجرا، چه مقدار باشد تا سود برگزارکنندگان بیشینه شود؟ با توجه به اینکه تبلیغ در فروش بلیت مؤثر است، این تبلیغ به‌صورت پویا و بهینه در طول اجرا چگونه است؟ این پژوهش برای پاسخ به این سوال‌ها، با طراحی سیستمی تصمیم‌گیر، بر پایه کنترل بهینه صورت گرفته است. مدل ارائه‌شده، این قید را ندارد که فعالیت تفریحی نخستین بار و یکبار برای همیشه به وقوع بپیوندد. در ضمن این پژوهش با ارائه این مدل در پی ترویج کاربرد کنترل بهینه است که در ایران کمتر استفاده می‌شود.

ادامه مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم، مرور کوتاهی بر پژوهش‌های مرتبط با این تحقیق صورت می‌گیرد. در بخش سوم، مدل پیشنهادی این پژوهش برای فروش بلیت یک رخداد ورزشی ـ تفریحی تشریح می‌شود. در بخش چهارم، تحلیل‌های مرتبط با مدل ارائه خواهد شد. بخش پایانی شامل نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آینده است. اثبات روابط به‌دست آمده نیز به صورت ضمیمه ارائه شده است.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در این بخش برخی از پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه قیمت‌گذاری و تبلیغ پویا بررسی می‌شود. راجان[۲] و همکاران (۱۹۹۲)، در یک محیط تصمیم‌گیری متعین و غیرتصادفی، سود یک خرده فروش انحصارگر را از طریق نوسات قیمت بیشینه کردند. آنها تصمیمات انبار کالا را با لحاظ-

---

۱. Stand up

۲. Ragan

کردن نرخ فسادپذیری و افت ارزش بازاری آن انجام دادند [۱۵]. گالجو و ون‌ریزین[۱] (۱۹۹۴)، یک مسئله طراحی خط‌مشی قیمت‌گذاری برای محصول فسادپذیر[۲] با تقاضای احتمالی را مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که تابع ارزش (درآمد مورد انتظار بهینه) برحسب ظرفیت اولیه و طی دوره فروش افزایشی و محدب است؛ بنابراین یک انبار اولیه بزرگ‌تر و یا زمان بیشتر برای فروش به قیمت بهینه بالاتری در دوره فروش طولانی‌تر منجر خواهد شد [۶]. فنگ و گالجو[۳] (۱۹۹۵)، مسئله فروش انباری مشخص با یک افق زمانی کوتاه را بررسی کردند. آن‌ها در پی تعیین زمان بهینه تغییر قیمت از سطح قبلاً مشخص‌شده به سطح معین‌شده دیگری و نیز جهت گیری استراتژی افزایش و یا کاهش قیمت بودند [۵]. سثی[۴] و همکاران (۲۰۰۶)، مدلی برای پذیرش محصول جدید پیشنهاد کردند که اثرات قیمت و تبلیغ را در یک مسئله کنترل بهینه معین، لحاظ می‌کند. آن‌ها خط‌مشی بهینه قیمت‌گذاری و تبلیغ پویا را در یک مسئله کنترل معین با افق نامتناهی معرفی کردند. تحلیل آن‌ها بر پایه این حقیقت است که معادله همیلتون ـ ژاکوبی ـ بلمن[۵] مدلشان، معادل یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است که یک حل تحلیلی دارد [۱۶]. جورجنسن [۶] و همکاران (۲۰۰۹)، با استفاده از کنترل بهینه غیرتصادفی، یک استراتژی قیمت-گذاری و تبلیغ با عنوان «قیمت‌گذاری دو بازار» ارائه کردند که اولی بازارعادی با تبلیغ فروش و دومی بازار لحظه آخری، بدون تبلیغ است. در هر دو بازار قیمت پویا نیست و عددی ثابت فرض شده است. ممکن است که استراتژی افزایش یا کاهش قیمت در بازار لحظه آخری رخ دهد. تقاضای بازار عادی به تبلیغ، قیمت و تقاضای تجمعی بستگی دارد. بقیه عوامل مؤثر در تقاضا، در مدل انتشار بس (اثر اشاعه) به‌حساب می‌آید [۹]. در مدل بس، فرآیند فروش محصول جدید برای یک کالای بادوام، متاثر از نوآوری آن محصول و میزان تقلید مشتریان (اثر دهان به دهان) است [۲۰]. فرض بر این است که تعداد بلیت‌های فروخته‌شده افزایش می‌یابد و از زمانی که مشتریان بالقوه درباره آن می‌آموزند، تقاضا بیشتر می‌شود. آن‌ها دریافتند که تبلیغ در طول زمان باید کاهش یابد. این پژوهش نیز در راستای اهداف پژوهش جورجنسو همکاران است؛ اما چون از مدل بس استفاده نمی‌شود، به‌مراتب کاربردی بیشتری دارد و نیز مدل‌سازی با دقت زیادتری صورت گرفته است.

هلمز [۷] و همکاران (۲۰۱۳)، مدل معرفی‌شده را تعمیم دادند. آن‌ها اثرات پذیرش اختیاری و اشباع را در نظر گرفتند و مسئله کنترل مربوطه را با یک افق زمانی متناهی و نامتناهی حل

---

۱. Gallego & van Ryzin
۲. Perishable product
۳. Feng, & Gallego
۴. Sethi
۵. Hamilton-Jacobi-Bellman
۶. Jørgensen
۷. Helmes

کردند [۱۶]. اگر افق زمانی متناهی باشد، مسئله همیلتون ـ ژاکوبی ـ بلمن به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مرتبه اول با شرایط مرزی ویژه تبدیل می‌شود. آن‌ها با کمک معادله درفمن ـ استینر[۱] فرمول‌های صریحی از تابع ارزش و خطمشی‌های بهینه ارائه کردند [۷]. شلوسر[۲] (۲۰۱۵)، قیمت‌گذاری و تبلیغ پویای احتمالی در بازارهای انحصاری چندگانه با کشش قیمت و تبلیغ ثابت را بررسی کرد. وی فروش کالاهای فسادپذیر و بادوام[۳] و اثرات پذیرش تقاضا را در نظر گرفت و از تکنیک‌های شبیه‌سازی کارا برای ارزیابی بهینگی فرآیند فروش کنترل‌شده در طول زمان بهره گرفت [۱۷]. وبر[۴] (۲۰۱۵)، در رساله دکتری خود با عنوان «کنترل انبارداری بهینه با قیمت‌گذاری و تبلیغ پویا» از کنترل بهینه متعین برای قیمت‌گذاری و تبلیغ پویا استفاده کرد [۲۰]. فصل دوم رساله او با الهام از کار راجان، با عنوان «قیمت‌گذاری و تبلیغ پویای بهینه با هزینه انبارداری» است. فصل سوم رساله، همان مقاله هلمز [۵] و همکاران (۲۰۱۳) است که در حل آن از اصل ماکزیمم پونتری‌آگین[۶] استفاده شده است. شلوسر (۲۰۱۶)، در مقاله دیگری،مدل قیمت‌گذاری و تبلیغ پویای احتمالی را ارائه کرد که در آن تقاضا وابسته به زمان است. وی در این پژوهش، فروش تعداد متناهی از اقلام را در مدل‌های قیمت‌گذاری و تبلیغ پویای احتمالی با کشش تقاضای وابسته به زمان بررسی کرد [۱۸]. جورجنسن و زاکور[۷] (۲۰۱۹)، در ادامه گسترش پژوهش،خود وهمکاران [۹]، مسئله قیمت‌گذاری و تبلیغ برای رویدادی تفریحی که یک بار و برای بار نخست برگزار می‌شود را با سه خطمشی، قیمت‌گذاری پویا، قیمت‌گذاری ثابت و قیمت‌گذاری دو بازار ارائه دادند. در قیمت‌گذاری دو بازار، دوره فروش متشکل از یک دوره قیمت‌گذاری عادی و دوره قیمت‌گذاری لحظه آخر است. زمان انتقال از دوره عادی به دوره قیمت‌گذاری لحظه آخر، از طریق مدل مشخص می‌شود (همانند مقاله [۹]). مدل سازی آن‌ها به گونه‌ای است که مشتریان توانایی دیدن تعداد بلیت‌های فروش‌نرفته را دارند [۱۰].

عادلی و زندیه (۲۰۱۳)، با اشاره به اهمیت تصمیمات تاکتیکی کنترل موجودی و انتخاب سیاست بهینه در این زمینه، به لزوم مسئله منبع‌یابی و سیاست موجودی یکپارچه پرداختند [۱]. آن‌ها با روش‌های فراابتکاری سعی در حل مسئله احتمالی تقاضا و زمان تحویل برای کارخانه داشتند و محاسبه دقیق هزینه کمبود موجودی را به‌عنوان هدفی مجزا در پژوهش خود گنجاندند. اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۵)، در مطالعه‌ای در باب برنامه‌ریزی ظرفیت، مدل برنامه‌ریزی خطی

۱. Dorfman-Steiner
۲. Schlosser
۳. Durable
۴. Weber
۵. Helmes
۶. Pontryagin maximum principle
۷. Jørgensen& Zaccour

احتمالی با هدف برنامه‌ریزی ظرفیت انرژی برق را طراحی کردند. در مدل ارائه‌شده، مکان، زمان‌بندی بهینه تجهیزات انرژی برق و همچنین مدیریت مصرف انرژی و افزایش رضایت مشترکین لحاظ شده است [۲]. تالیزاده و محمدی (۲۰۱۵)، پژوهشی درباره تصمیمات قیمت گذاری و بازاریابی برای یک زنجیره تأمین دوسطحی، شامل یک تولیدکننده و دو خرده‌فروش انجام دادند. آن‌ها همچنین تأثیر مشارکت تولیدکننده در هزینه‌های تبلیغات محلی خرده‌فروشان را بررسی کردند و برای حل مدل خود از نظریه بازی‌ها کمک گرفته و مقادیر بهینه قیمت و هزینه‌های تبلیغات را به‌نحوی تعیین کردند که سود کل حداکثر شود [۱۹]؛ البته در سه مقاله اخیر از کنترل بهینه پویا استفاده نشده، ولی در زمینه بهینه‌یابی و قیمت‌گذاری هستند.

پژوهش حاضر در راستای تکمیل پژوهش‌های جورجنسن و همکاران (۲۰۰۹) و جورجنسن و زاکور (۲۰۱۹) و از معدود مطالعات در زمینه قیمت‌گذاری و تبلیغ پویا برای رخداد تفریحی در یک محیط غیرتصادفی است و محدودیت‌های دو تحقیق قبلی را ندارد. اول اینکه قید الزام رخداد برای نخستین بار را نداشته و برای دفعات بعدی مدل کارایی دارد؛ درضمن بسیاری از هزینه‌ها و شرایط محیطی در اجرای رخداد در نظر گرفته شده است؛ مهم‌تر آنکه با پویابودن قیمت و تبلیغ در مدل می‌توان تعداد بلیت برای فروش را نیز ارائه داد.

۳. روش‌شناسی پژوهش

مسئله کنترل بهینه و ارائه مدل. در این پژوهش از مدل کنترل بهینه استفاده شده است که در مقدمه تاریخچه آن ارائه شد. در این بخش، ابتدا بیان صوری مسئله کنترل بهینه، معرفی می‌شود. مسئله کنترل بهینه دارای عوامل زیر است:

متغیر زمان که به t نشان داده می‌شود، $t_0 \le t \le T$ که t_0 زمان شروع و T، زمان انتهایی است. متغیر وضعیت یا حالت[۱] $X(t) \subset A\epsilon\mathbb{R}^n$ که متغیری پیوسته از زمان، در فضای nبُعدی $\mathbb{R}$ و متعلق به فضای ممکن A است؛ بنابراین می‌توان چند متغیر وضعیت داشت. متغیر کنترل $U(t) \subset B\epsilon\mathbb{R}^m$ متغیری است به صورت تکه‌ای-پیوسته از زمان و بهوسیله آن بر متغیر وضعیت اثر گذاشته می‌شود. این متغیردر فضای mبُعدی $\mathbb{R}$ و متعلق به فضای ممکن، B است. اثرگذاری متغیر کنترل بر متغیر وضعیت به‌وسیله رابطه‌ای موسوم به «معادلات حرکت»[۲] و به صورت زیر است :

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t), U(t)) \qquad (۱)$$

۱. State variable
۲. Motion Equations

در رابطه (۱) $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ تابعی هدف[۱] که باید آن را کمینه یا بیشینه کرد، در حالت کلی به شکل زیر است:

$$Maxor\ MinV\ [U,T] = \int_{t_0}^{T} I\left(t, X(t), U(t)\right)dt \qquad (۲)$$

مسئله عبارت است از: تعیین مسیرهای زمانی بهینه، متغیر کنترل $U^*(t)$ و به‌واسطه آن تعیین متغیر وضعیت بهینه $X^*(t)$ است تا تابعی هدف نسبت به معادلات حرکت، بیشینه و یا کمینه شود؛ یعنی:

$$MaxorMinV[U,T] = \int_{t_0}^{T} I(t, X(t), U(t))dt$$
$$s.t. \dot{X}(t) = f(t, U(t), X(t)) \qquad (۳)$$

این مسئله موسوم به «مسئله کنترل بولزا»[۲] است [۸].

برای حل تحلیلی مسئله کنترل سه روش اصلی، حساب تغییرات، اصل ماکزیمم پونتری اگین و روش بلمن وجود دارد و نرم افزارهایی نیز برای حل تقریبی آن طراحی شده‌اند [۱۴].

مدل‌سازی. مدل این پژوهش برگرفته از یک مدل کنترل موجودی مقاله وبر[۳]، که از راجان، استفاده کرده است است و با احتساب هزینه‌ها در آن تغییرات مختلفی اعمال شده است [۷]. برگزارکننده انحصارگر رخداد تفریحی و ورزشی خواهان بیشینه‌سازی سود، با تعیین مسیرهای زمانی پویای بهینه قیمت و تبلیغ $w^*(t), p^*(t)$ (متغیرهای کنترل) است. این سود از طریق فروش بلیت رخداد تفریحی ($x(t)$ متغیر وضعیت) با اعمال هزینه‌های جاری و موجود در فعالیت، حاصل می‌شود. در مدل، پرداخت هزینه برای تبلیغ در نظر گرفته شده است؛ به‌طوری‌که مجری طرح قادر به کنترل رخداد باشد (اثرگذاری بر روی تقاضا). طول دوره زمانی فروش بلیت که با T نمایش داده می‌شود ثابت، معین و متناهی فرض می‌شود و از سوی برگزارکنندگان مراسم تعیین می‌گردد. نرخ تنزیل وابسته به زمان $r(t) \geq 0$ است و $R(t) = \int_0^t r(s)ds$ نرخ تنزیل تجمعی است. (می‌توان نرخ را ثابت فرض کرد). نرخ تقاضا یا تقاضا در هر لحظه از زمان، $\lambda(t)$ که از [۷]الهام گرفته شده تابعی پویا، متعین یا غیرتصادفی است و $\lambda(t) \geq 0$؛ درضمن

---

۱. Objective Functional

۲. Bolza

۳. Weber, M.

تابعی است از متغیر کنترل $u(t) = u(p(t), w(t))$ ، که در آن قیمت $p(t)$ و فعالیت‌های تبلیغ $w(t)$ در زمان t، $0 \le t \le T$ است و به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\lambda^{(u)}(t) = \lambda(t.u(t)) = \lambda(t.p(t).w(t)) = \mu(t)p(t)^{-\varepsilon(t)}w(t)^{\delta(t)} \qquad (۴)$$

در این رابطه $1 < \underline{\varepsilon} \le \varepsilon(t) < \infty$ کشش قیمت (وابسته به زمان) و $\bar{a} \ge a(t) > 0$ $\delta(t) \ge 0$ کشش تبلیغ فرض شده است. $a(t)$ یک پارامتر هزینه است که در ادامه بیشتر درباره آن‌ها توضیح داده می‌شود. توابع پارامتری $a(t)$، $\delta(t)$ و $\varepsilon(t)$ توابعی، پیوسته - تکه ای[1]هستند. فرض می‌شود حد پائینی $\underline{\varepsilon}$ و حد بالایی $\bar{a}$ اعداد ثابت و دلخواهی باشند. این کران‌های بالا و پایین، انتگرال‌پذیری عبارات را وقتی که $a(t)$، $\delta(t)$ و $\varepsilon(t)$ به‌صورت نمایی رشد می‌کنند، میسر می‌سازد.

$\Delta(t)$ بصورت $\Delta(t) = \frac{\delta(t)}{a(t)}$ به‌عنوان کارایی تبلیغ تعریف می‌شود. این تابع (پارامتری) کارایی تبلیغ را اندازه‌گیری می‌کند و فقط مقادیری در بازه $[0،1]$ اتخاذ می‌کند. مشابه با کشش قیمت، کشش تبلیغ وابسته به زمان، این حقیقت که پاسخگویی به تبلیغ ممکن است در طول زمان تغییر کند را به‌شمار می‌آورد. برای مثال، ترفیع کنسرت جدید یک خواننده مشهور، ممکن است اثر بیشتری از ترفیع برای آلبوم‌های قبلی همان خواننده داشته باشد و در مورد رویداد ورزشی تفریحی، تبلیغ برای مسابقه باشگاهی مشخص در یک روز خاص ممکن است مخاطب بیشتری را نسبت به تبلیغ در زمانی دیگری جذب کند. با کمک ضریب هزینه وابسته به زمان $a(t)$، در مدل‌سازی، ملاحظه اثر تقلیلی تبلیغ در طول زمان در حالت δ (تقریباً) ثابت، میسر می شود. $a(t)$ در طول زمان برای حفظ نرخ تبلیغ در یک مقدار داده شده، بسیار زیاد می‌شود. مقادیر ویژه‌ای از $a(t)$ و $\delta(t)$ در حالات خاصی، عموماً در نسبت دو تابع؛ کارایی تبلیغ $\Delta(t)$، مهم هستند. حضور پارامتر a امکان محاسبه هزینه‌ای که برای تبلیغ صرف می‌شود و وجود پارامتر δ، تمایز بین اثر تبلیغ را مرتفع می‌سازد. حضور دو پارامتر a و δ امکان پوشش حالت‌های بسیاری از موقعیت‌های متصور از ترفیعات را فراهم می‌کند.

$\gamma(t) = \frac{\varepsilon(t)-\Delta(t)}{1-\Delta(t)}$، کشش قیمت اهرمی تقاضا[2]، اثر تعامل دو ابزار بازاریابی قیمت و تبلیغ را شرح می‌دهد. اگر $\delta = \Delta = 0$، کشش قیمت اهرمی تقاضا معادل کشش قیمت است و این یک نتیجه طبیعی است که هرگاه تبلیغ اثری بر تقاضا ندارد، نرخ تقاضا به قیمت و زمان وابسته است

---

۱. Piece Wise Continuity

تابعی پیوسته ـ تکه‌ای است اگر دامنه تابع بتواند به بازه‌های متناهی تقسیم شود که در هر زیر بازه باز از آن، تابع پیوسته باشد و روی هر بازه فشرده‌ای، تابع کراندار باشد.

۲ *leveraged price elasticity of demand*

و این همان مدل قیمت‌گذاری خالص راجان و همکاران است [۱۵]. اگر $\Delta(t)$ مثبت باشد، تبلیغ اثرگذار است و اندازه این اثر به‌وسیله δ مشخص می‌شود. γ با ε و Δ افزایش می‌یابد.

متغیر $\mu(t) > 0$، تابعی از زمان و منعکس‌کننده یک عامل فصلی یا تأثیری ساختاری روی تقاضا است که در حوزه تصمیمات انحصارگر و مجریان مراسم نیست. با نگاهی واقع‌بینانه، تابع μ بسیار مهم بوده و متناسب با تعداد افراد علاقمند به خرید بلیت در یک بازه زمانی کوتاه اطراف t است. در کاربردها، μ عموماً تحت تأثیر عوامل متعددی است. عواملی نظیر دردسترس‌بودن و سهل‌الوصول‌بودن خرید بلیت، عقیده و احساسات مشتریان نسبت به رویداد و تکامل درآمد مشتریان بالقوه بسیار مهم هستند. عواملی نظیر اینها فرض می‌شود که در μ یکپارچه هستند. μ «شدت ورود» یا «تقاضای پایه» نامیده می‌شود و منعکس‌کننده رفتار خرید استاندارد مشتریان در طول زمان است. همه عوامل ذکرشده در بالا در μ شناور شده‌اند و در تابع تقاضا ی رابطه(۴) ، وارد می‌شوند؛ بنابراین تابع μ تأثیر اثرات گوناگون در تابع تقاضا را میسر می‌سازد. اگر در معادله (۴) مقادیر قیمت و تبلیغ مساوی یک فرض شوند، نرخ تقاضا مساوی $\mu(t)$ است. فرض کنید c_0 نشان‌دهنده هزینه کرایه برای هر صندلی باشد و $l(t) \geq 0$ نرخ هزینه پشتیبانی (وابسته به زمان) مثل دستمزد همکاران در مجموعه، فروش غذا، نوشیدنی یا کالاهایی به خریداران بلیت که برای حضور بهتر در مراسم توصیه می‌شوند، است (این تابع در سایر مدل‌ها نیامده است). تابع $l(t)$ هزینه سرمایه نظیر بهره‌وری نیروی کار، هزینه‌های بیمه و غیره را دربرمی‌گیرد. فرض می شود که هزینه‌های تبلیغ در نرخ $w(t)^{a(t)}$ گسترش می‌یابد که به این ترتیب هزینه مقعر و محدب را میسر می‌سازد. درعمل انحصارگر می‌تواند گزینه های متعددی برای فعالیت‌های تبلیغاتی داشته باشد. برای مثال، اجرای یک کمپین تبلیغاتی از سوی یک آژانس تبلیغاتی بزرگ و یا بودجه تبلیغات از سوی یک واحد داخلی تبلیغ هزینه شود. مثلاً تبلیغ می‌تواند از طریق دستیاران فروش صورت گیرد که وظیفه‌شان توصیه و تشویق خریداران بالقوه به خرید در طول زمان کاری است. اگر $\delta(t) > 0$، یک تصمیم خرده‌فروش که هیچ پولی روی تبلیغ صرف نشود، می‌تواند به عدم‌اجرای رخداد ورزشی–تفریحی و یا تعطیلی کسب و کار منجر شود. تابع تقاضا غیرتصادفی فرض شده، معادله (۴) ، نشان می‌دهد که تقاضا متأثر از سطح تبلیغ بوده و مقدار قیمت بر خرید تأثیرگذار است.

محدودیت $a(t) > \delta(t)$، $t \in [0,T]$ روی توابع پارامتری این اطمینان را می‌دهد که اثر اهرمی تبلیغ محدودشده باقی می‌ماند؛ در غیر این‌صورت مخارج تبلیغ به‌سمت نامتناهی‌شدن سوق داده می‌شود تا از این طریق افزایش تقاضا و متعاقب آن افزایش درآمد بی‌نهایت، اتفاق بیفتد. فرض کنید $x(t)$، $0 \leq t \leq T$، نشان‌دهنده تعداد بلیت باقیمانده یا تعداد صندلی‌های خالی در زمان t باشد. $x(t)$ متغیر وضعیت یا حالت سیستم و یک عدد حقیقی نامنفی است. برگزارکنندگان رویداد ورزشی ـ تفریحی مجاز به نفروختن بلیت در صورتی که بلیت موجود است،

نیستند؛ بنابراین $x(t) \geq 0$ است. تعداد صندلی‌های اولیه با x_0 نشان داده می‌شود؛ بنابراین $x(0) = x_0$ و اینکه چه تعداد بلیت برای مراسم باید تدارک دیده شود، یعنی مقدار x_0، توسط مدل ارائه می‌شود. فرض می‌شود که مجریان رویداد ورزشی ـ تفریحی با نرخ تنزل $q(t) \geq 0$ ناچار هستند در طول دوره فروش تعدادی از بلیت‌های خود را به‌صورت رایگان در اختیار خیریه ها، آسایشگاه‌ها، مدارس، دانشگاه‌ها و مواردی از این دست که بهایی برای خدمات نمی‌پردازند، قرار دهند. فرض می‌شود که $q(t)$ همانند $l(t)$ و $r(t)$ توابع پیوسته ـ تکه‌ای غیرمنفی و انتگرال‌پذیر روی $[0،T]$ باشد. برای هر کنترل مجاز u، تغییرات تعداد فروش بلیت به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود که معادله حرکت است:

$$\dot{x}(t) = -\lambda^{(u)}(t) - q(t)x(t) \qquad x(T) = 0 \tag{۵}$$

در معادله حرکت فوق ، $\dot{x}(t) = {dx(t)}/{dt}$ نشان‌دهنده مشتق نسبت به t است. با فرض $\lambda^{(u)} \geq 0$ و $q(t) \geq 0$ ایجاب می‌کند که فرآیند فروش بلیت نامنفی باشد و بازپس بلیت رخ نخواهد داد. برای ثابت دلخواه T زمان کل اجرا، u_T نشان‌دهنده مجموعه فضای ممکن کنترل است:

$$u_T = \left\{u \middle| u(t) = u(p(t)،w(t))\right\} \tag{۶}$$

و u_T یک تابع برداری پیوسته - تکه‌ای روی بازه $[0,T]$ است.

تابع هدف این مدل (متمایز با سایر مطالعات است) که نمایش ارزش فعلی سود خالص از فروش بلیت است، در فاصله زمانی $[0,T]$ به‌صورت زیر است:

$$Max\pi_1(u.T) = \int_0^T e^{-R(t)}\left[p(t)\lambda^{(u)}(t) - l(t)x(t) - w(t)^{a(t)}\right]dt - c_0x_0 \tag{۷}$$

در رابطه بالا $p(t)\lambda^{(u)}(t)$ فروش در هر لحظه، $l(t)x(t)$ هزینه‌های پشتیبانی و $w(t)^{a(t)}$ هزینه های تبلیغات است. c_0x_0 هزینه‌هایی که باید در ابتدا دوره فروش بلیت پرداخت شوند، بوده و چون مقداری معلوم است، در فرآیند حل مدل و در تعیین مقادیر بهینه اثر ندارد. می‌توان متغیر کنترل $u^* \geq 0$ را پیدا کرد تا تابعی هدف (۷) فوق، $\pi_1^*(T,u^*) = \pi_1^*(T)$ بیشینه شود.

در مسئله کنترل بالا، تعداد صندلی‌های موجود در فروش بلیت از ابتدا داده نشده است؛ اما به روش زیر مشخص خواهد شد.

معادله زیر ، ارتباط بین یک کنترل مجاز u و فرآیند متغیر وضعیت مرتبط (تعداد صندلی‌ها برای فروش) را تعریف می‌کند.

فرض کنید $Q(t)=\int_0^t q(s)ds$ نشان‌دهنده تعداد تجمعی صندلی‌های مجانی در فاصله زمانی $0 \le t \le T$ باشد. ثابت می‌شود (اثبات درضمیمه آمده است) که داریم:

$$x(t)=e^{-Q(t)}\int_t^T e^{Q(s)}\lambda^{(u)}(s)ds \quad (۸)$$

این معادله تعداد صندلی‌های موردنیاز در زمان t را در بازه [0,T] به‌دست می‌دهد. در ضمن معادله (۸) تعداد بلیت برای فروش یا ظرفیت مکان مورداجرای رویداد ورزشی ـ تفریحی، x_0 را برای هر کنترل داده‌شده u، بویژه برای کنترل بهینه، ارائه می‌دهد. تابع هزینه به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$c(t)=e^{Q(t)+R(t)}\left(c_0+\int_0^t e^{-(Q(s)+R(s))}l(s)ds\right) \quad (۹)$$

تابعی هزینه c(t) مستقل از متغیرهای کنترل است و همه هزینه‌های وابسته به اجرا را دربر می‌گیرد. c(t) تابعی هزینه، مجموع ارزش آینده از هزینه‌های مرتبط با فروش یک واحد و ارزش آینده از مقدار حاضر هزینه اجرا در زمان t است. هزینه‌های مرتبط با تنزل سطح موجود بلیت‌ها به‌وسیله عامل $e^{Q(t)}$ به حساب آورده می‌شود. برای فروش هر واحد در زمان t برگزارکنندگان باید $e^{Q(t)}$ واحد در آغاز در نظر بگیرد. برای مثال اگر نرخ تنزل۱۰ درصد باشد، مجریان برگزارکننده رخداد باید برای فروش یک بلیت در زمان t=10، exp(1) واحد در آغاز در نظر گرفته باشند.

فرض کنید $\pi_1^*(T)=\pi_1(T.u^*)$ نشان‌دهنده مقدار بهینه مساله کنترل (۷) ، باشد و $u^*=(p^*.w^*)$ را به‌عنوان معرف کنترل بهینه باشد،پس مسئله کنترلبهینه به صورت زیر در می آید، و داریم:

$$\pi_1^*(T)=sup_{u\epsilon u_T}\int_0^T e^{-R(t)}\left[\left(p(t)-c(t)\right)\lambda^{(u)}(t)-w(t)^{a(t)}\right]dt \quad (۱۰)$$

حل مدل: اگر فرض شود، $1<\underline{\varepsilon}\le\varepsilon(t)$، $0\le\delta(t)<a(t)\le\bar{a}$، $\Delta(t)={\delta(t)}/{a(t)}$ و $\gamma(t)=\frac{\varepsilon(t)-\Delta(t)}{1-\Delta(t)}$ به‌طوری که $0\le t\le T$ و $c_w(t)=[\frac{\Delta(t)}{\varepsilon(t)-1}\left(\frac{\varepsilon(t)-1}{\varepsilon(t)}\right)^{\varepsilon(t)}]^{\frac{1}{a(t)-\delta(t)}}$ و درضمن فرض شود $\mu(t)>0$ و تقاضا به‌صورت $\lambda\left(t.p.w\right)=\mu(t)p^{-\varepsilon(t)}w^{\delta(t)}$ و نرخ

هزینه $c(t)$ از معادله (۹)، داده شده باشد، p^* و w^* که کنترل بهینه به ترتیب برای قیمت و تبلیغ برای هر t، $0 \leq t \leq T$ هستند، به‌صورت معادلات زیر بیان می‌شوند:

$$p^*(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t)-1} c(t) \quad (۱۱)$$

$$w^*(t) = c_w(t) \left(\frac{\mu(t)}{c(t)^{\varepsilon(t)-1}}\right)^{\frac{1}{a(t)-\delta(t)}} \quad (۱۲)$$

اثبات روابط (۱۱) و (۱۲) ، در ضمیمه آمده است. به این ترتیب از طریق این معادلات می توان مقادیر ،بهینه قیمت و تبلیغ را در هر لحظه از زمان محاسبه کرد. اینکه مقادیر کشش تبلیغ و قیمت چه اعدادی باشند و دیگر پارامترهای موجود در معادلات چه تأثیری بر مقدار نهایی قیمت، تبلیغ و نرخ فروش دارند، از موضوعات مهم برای تصمیم‌گیری هستند که در ادامه تشریح می‌شوند.

برای سهولت کار، در جدول ۱، پارامترها، نمادها و متغیرهای پژوهش به‌صورت خلاصه آورده شده است.

جدول ۱. شمای کلی از پارامترها و متغیرها

علامت	شرح	علامت	شرح
P(t)	متغیر کنترل قیمت	A	پارامتر هزینه تبلیغ
W(t)	متغیر کنترل تبلیغ	Δ	کارایی تبلیغ
X(t)	متغیر وضعیت، تعداد بلیت‌های باقیمانده در زمان t	γ	کشش قیمتی اهرمی تقاضا
T	زمان انتهایی فروش بلیت	c_0	هزینه ثابت کرایه هر صندلی
λ	نرخ تقاضا	l	نرخ هزینه پشتیبانی
R	نرخ تنریل	q	نرخ تنزل
R	نرخ تنزیل تجمعی	Q	تعدادتجمعی بلیت‌های رایگان
M	تابع شدت ورود یا تقاضای پایه	π_1^*	سود بهینه
E	کشش قیمت	c_w	نماد تعریف‌شده برای خلاصه‌شدن فرمول
ℝ	مجموعه اعداد حقیقی	H	ماتریس هشین
Δ	کشش تبلیغ	ν	حاشیه سود
C	تابعی هزینه	u_T	مجموعه فضای ممکن کنترل

۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

تحلیل مدل. در معادله (۴) ، فرض می‌شود که تعداد بلیت باقیمانده، تأثیری در تقاضا ندارد. در مقاله هلمز [1]، و همکاران (۲۰۱۳) [۷] و در فصل سوم رساله وبر[2]، (۲۰۱۵) ، [۲۰] توسط تابع $\psi(x)$ و در مقاله جورجنسن و زاکور (۲۰۱۹)، این تأثیر در تابع تقاضا به‌طور مستقیم وارد شده است [۱۰]. تأثیر تعداد صندلی‌های باقیمانده بر رفتار مشتریان کنونی توسط تابع کشش قیمت $\varepsilon(t)$ پوشش داده می‌شود. یک کشش قیمتی افزایشی نشان‌دهنده حساسیت زیاد مشتریان به قیمت در طول زمان است. این حالت برای رخداد ورزشی ـ تفریحی به‌صورت زیر می‌تواند متصور باشد:

در ابتدای معرفی و اجرای فعالیت، رخداد موردنظر از دید مشتریان بسیار هیجان‌انگیز، جدید و بکر است. سینمای چندبُعدی، کنسرت‌های تقلید صدا، نمایش‌های خنده، راه‌رفتن روی آتش، مثال‌هایی از این دست هستند. تمایل برای حضور و دیدن این‌گونه رخدادها که تجربه آن منحصربه‌فرد و جدید است، در ابتدا زیاد است؛ اما بعد از گذشت دوره‌ای از اجرای این فعالیت‌ها، همه‌گیرشدن آن در جامعه و انتشار همه یا گوشه‌هایی از مراسم برای مثال فضای مجازی و مشاهده آن توسط مشتریان بالقوه، آرزو و تمایل برای مشاهده و حضور در این برنامه‌ها، در اجراهای بعدی نزول می‌کند و مشتریان به قیمت حساسیت بیشتری نشان می‌دهند. این فرآیند نزول قیمت می‌تواند در پی انتشار اخباری در جهت کاهش محبوبیت عامل یا عوامل اجرای مراسم در طی دوره فروش بلیت نیز رخ دهد.

از سوی دیگر این حالت نیز ممکن است رخ دهد که کشش قیمت فروش بلیت برای فعالیت ورزشی ـ تفریحی در طول زمان کاهش یابد. در ابتدای دوره فروش بلیت، مشتریان بالقوه انعطاف‌پذیر هستند و ممکن است انتخاب‌های دیگری برای آن روز موعود اجرای فعالیت اجتماعی وجود داشته باشد؛ اما با نزدیک‌شدن موعد اجرای رخداد ورزشی ـ تفریحی، گزینه‌های دردسترس کم و محدود می‌شوند؛ بنابراین مجریان مراسم متمایل به فروش بلیت در قیمت‌های بالاتر می‌شوند. با این تفاسیر دیگر کشش قیمت تنها به این لحظه از زمان وابسته نیست و به طول دوره فروش نیز وابسته است؛ بنابراین $\varepsilon(t) = \varepsilon(t,T)$ اگرچه به‌صراحت در نظر گرفته نشده، اما تقاضای وابسته به سطح موجودی بلیت یا مقداری که تاکنون فروخته شده است، می تواند با یک انتخاب دقیق از کشش قیمت وابسته به زمان مدل‌سازی شود.

در تابع تقاضا ، معادله (۴)، عبارت $p(t)^{-\varepsilon(t)}$ ملاحظه می شود. در این عبارت، p و ε، می تواند خیلی کوچک شود. برای مثال، وقتی رخدادی اجتماعی مشابه با واقعه‌ای که مجریان درصدد برنامه‌ریزی برای آن هستند، در بازار وجود داشته باشد و مشتریان نسبت به قیمت

---

۱. Helmes, K.,

۲. Weber, M.

حساس باشند و انتخاب‌های خود را به سمت گزینه‌های دیگر موجود در بازار سوق می‌دهند. در این صورت، تابع μ می‌تواند خیلی زیاد باشد و تحلیل عددی چالش‌برانگیز می‌شود. برای اجتناب از این مشکل، p بصورت $p = \frac{\tilde{p}}{p_0}$ یا $p = \frac{\tilde{p}}{c_0}$ تفسیر می‌شود که $\tilde{p}$ قیمت مشاهده‌شده به‌وسیله مشتریان، p_0 سطح قیمت مرجع و c_0 هزینه واحد هستند. اگر p به‌صورت چنین کسری تعریف شود، مقادیر عددی آن به ۱ نزدیک می‌شوند و عبارت نمایی با مقادیر توان بزرگ، دسترس‌پذیرتر و قابل‌توجیه در شرایط واقعی بازار هستند. یک فایده دیگر از بیان قیمت نسبی این است که μ می‌تواند به‌عنوان ظرفیت طبیعی یا فروش‌های محرک بازار[۱] تفسیر شود.

جوابهای کنترل‌های بهینه p^* و w^* از روابط ۱۱ و ۱۲، فقط به زمان جاری t بستگی دارند و زمان طی‌شده و یا مقدار T تأثیری بر آن ندارد. ملاحظه می‌شود که در افق‌های زمانی مجزا، نرخ قیمت و تبلیغ بهینه یکسان هستند. توجه شود که اگر توابع به پارامتر T وابسته باشند، برای مثال $0 \le t \le T$ $\tilde{\varepsilon} > \underline{\varepsilon}$ $\varepsilon(t) = \varepsilon\left(t,T\right) = \tilde{\varepsilon}e^{T-t}$؛ بنابراین حساسیت قیمت در طی زمان T کاهش خواهد یافت و طبیعتاً خط‌مشی بهینه به T نیز بستگی دارد؛ اما اکنون در هر زمان t، قیمت بهینه فقط به کشش قیمت $\varepsilon(t)$ و تابع هزینه c(t) وابسته است و نرخ ورود $\mu(t)$ و ضرایب تبلیغ a(t) و $\delta(t)$ تأثیری بر آن ندارند؛ بنابراین چه مجریان برگزاری رویداد ورزشی ـ تفریحی تبلیغ کنند و چه فعالیتی در جهت ترفیع نداشته باشند، قیمت یکسان است. فرمول قیمت (۱۱) ، همان فرمول ایستای قیمت‌گذاری برای انحصارگر است که با عنوان «رابطه آموروسو ـ رابینسون[۲]» شناخته شده است: درآمد حاشیه‌ای $\frac{\varepsilon(t)-1}{\varepsilon(t)p(t)}$ باید معادل هزینه (حاشیه‌ای) c(t) در هر نقطه از زمان باشد. انحصارگر در پی جست‌وجوی یک استراتژی بالابردن قیمت است که مقدار افزایش توسط $\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t)-1}$ مشخص می‌شود؛ بنابراین افزایش قیمت به کشش قیمت و تابع هزینه بستگی دارد. ابتدای مسیر بهینه، قیمت $\frac{\varepsilon(0)}{(\varepsilon(0)-1)c_0}$ است. به‌جز در حالت خاص l(t)=r(t)=q(t)=0، c(t) همواره افزایشی در طول زمان است؛ بنابراین قیمت بهینه هنگامی که کشش قیمت ثابت است یا کاهش می‌یابد، افزایش خواهد یافت (در این حالت استراتژی قیمت گذاری نفوذی[۳] بهینه است). وقتی که ε(t) افزایشی است، بیانی عمومی که مسیر بهینه در طول زمان چگونه است، وجود ندارد. برای شرح بهینگی قیمت‌گذاری پرمایه و گران[۴] در زمانی که قیمت‌ها در طول زمان کاهش می‌یابند، مشتق قیمت بهینه نسبت به زمان t محاسبه شده است.

---

۱. Market-driven sales
۲. Amoroso-Robinson relation
۳. Penetration strategy
۴. Skimming pricing

$$\dot{p}^*(t) = p^*(t)\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)(\varepsilon(t)-1)}\right) \overset{\varepsilon(t)\equiv\varepsilon}{=} \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\dot{c}(t) \quad (۱۳)$$

در اینجا قیمت‌گذاری پرمایه و گران ($\dot{p}^* < 0$)، بهینه است اگر و فقط اگر نسبت افزایش در ε (تقسیم‌شده به‌وسیله عبارت $\varepsilon - 1$) فراتر از نسبت افزایش تابع هزینه باشد. یک استراتژی قیمت‌گذاری پرمایه و گران در فروش بلیت رخداد تفریحی می‌تواند بدین صورت باشد که تازگی و جذابیت رخداد ورزشی ـ تفریحی رفته‌رفته با نزدیک‌شدن به زمان اجرا از بین برود. برای مثال، در فضای مجازی تحرکاتی صورت پذیرد که واقعه مورداجرا را پیش‌پا افتاده جلوه دهند، یا به اعتبار مجریان مراسم خدشه وارد شود و از محبوبیت ابتدایی آنان کاسته شود؛ بنابراین با گذشت زمان و نزدیک‌شدن به لحظه موعود اجرا، تمایل مشتریان به پرداخت‌های بالا برای بلیت افول می‌کند؛ به‌عبارتی دیگر حساسیت به قیمت از سوی مشتریان افزایش می‌یابد. درعمل حالت عکس نیز می‌تواند رخ دهد. ممکن است با گذشت زمان و نزدیک‌شدن به روزهای موعد اجرای رخداد ورزشی ـ تفریحی، زمان اجرا مصادف با تعطیلات باشد و مشتریان با تملک بالای مالی که اغلب خریدکنندگان در دقایق آخری رزرو بلیت محسوب می‌شوند، حاضر به خرید بلیت با قیمت‌های بسیار بالا باشند.

یک نتیجه دیگر از رابطه (۱۱) ، آن است که اگر کشش قیمت غیرافزایشی باشد، قیمت بهینه بسیار افزایش می‌یابد و اگر زمان نامتناهی باشد، متمایل به بی‌نهایت می‌شود. این در صورتی است که قیمت بلیت با مقادیر بالا است و هنوز تقاضای مثبت و درنتیجه یک حاشیه سود مثبت وجود دارد.

استراتژی تبلیغ بهینه w^* به همه پارامترهای مدل بستگی دارد. نرخ شدت ورود μ و تابع هزینه c اهمیت ویژه‌ای دارند، هر زمان که نرخ $\frac{\mu(t)}{c(t)^{\varepsilon(t)-1}}$ روی هر زیربازه $[0,T]$ ثابت باشد، بهینه آن است که سطح تبلیغ معادل با $const^{\frac{1}{a(t)-\delta(t)}} \times c_w(t)$ باشد. چون تابع پارامتری c_w فقط به مقادیر $a(t)$، $\delta(t)$ و $\varepsilon(t)$ بستگی دارد، بهینه آن است کـه اگـر کشـش قیمـت و کـارایی تبلیغ در زیربازه ثابت باشند، آنگاه در یک سطح ثابت، تبلیغ شود.

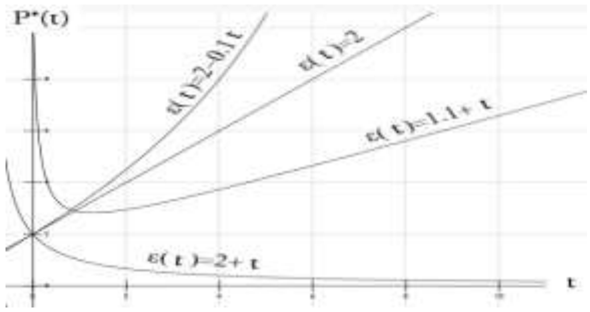
با توجه به مطالب بالا نتایج زیر قابل‌تفسیر است:

قیمت‌های پویای بهینه نه تحت تأثیر فرصت تبلیغ و نه کارایی تبلیغ هستند. اگر نرخ فروش به‌وسیله تبلیغ تقویت شود، مشتریان بیشتری بلیت را با قیمت یکسان خرید خواهند کرد. قیمت‌های پویای بهینه به‌طور مستقیم تحت تأثیر شدت ورود $\mu(t)$ نیستند؛ بنابراین قیمت‌های بهینه مستقل از اندازه بازار یا علاقه مشتریان به خرید هستند (معادله ۱۱).

قیمت‌های پویای بهینه در طول زمان تنها موقعی کاهشی هستند (یک استراتژی پرمایه و گران) که کشش قیمت افزایش یابد. عموماً استراتژی قیمت‌گذاری نفوذی در بازار که قیمت‌های بهینه در طول زمان افزایش یابند، اتفاق می‌افتد.

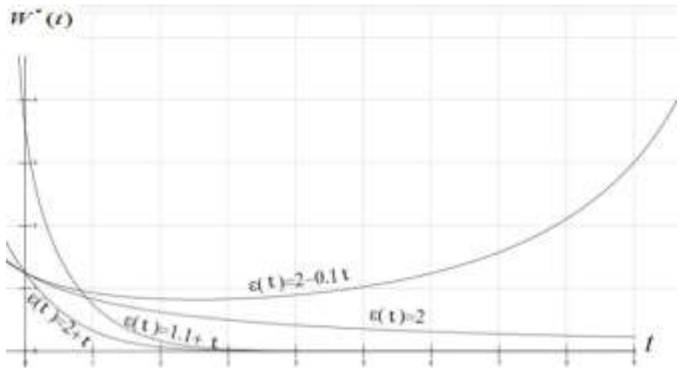
اگر همه پارامترهای مدل ثابت باشند و تابع هزینه c(t) در طول زمان افزایش یابد، بهینه آن است که هزینه‌های تبلیغ در طول زمان کاهش یابد (رابطه ۱۲) ، هزینه‌های حاضر در فروش بلیت به قیمت‌های بالاتر منجر می‌شود (رابطه ۱۱).

در ادامه برای تحلیل‌های بهتر، نمودارهای قیمت بهینه و تبلیغ بهینه به‌ازای مقادیر مختلفی از پارامترها ارائه شده است.



شکل ۱. نمودار قیمت

شکل ۱، بر اساس رابطه (۱۱) که مقدار بهینه قیمت را ارائه می‌دهد، ترسیم شده است. C(t) به‌صورت $c(t) = 1 + 0/05t$ و مقادیر مختلف $\varepsilon(t)$ که روی نمودار آمده است، ترسیم شد. به‌ازای این تابع هزینه و اینکه کشش قیمت عددی ثابت باشد، قیمت بهینه به‌طور یکنواخت افزایشی است. به‌ازای کشش قیمت با شیب مثبت، مشاهده می‌شود که قیمت بهینه در ابتدای فروش بیشترین مقدار را دارد و با شیبی منفی، کاهشی است که باید استراتژی قیمت‌گذاری پرمایه و گران را به‌کار برد. اگر کشش قیمت شیبی منفی داشته باشد، قیمت بهینه مقدار افزایشی با شیب مثبت دارد و قیمت‌گذاری نفوذی اجرا می‌شود.



شکل ۲. نمودار تبلیغ بهینه

شکل ۲، بر اساس رابطه ۱۲، ترسیم شده است. $c(t) = 1 + 0/05t$، a(t)=2، q(t)=r(t)=0، δ(t)=1، μ(t)≡10 و مقادیر متفاوت ε که بالای هر نمودار درج شده است. رفتار تابع تبلیغ بهینه همانند نمودار قیمت بهینه است؛ با این تفاوت که وقتی کشش قیمت عددی ثابت است، تبلیغ بهینه به‌طور یکنواخت کاهشی است. شدت ورود μ، عددی ثابت فرض شده است؛ بنابراین جز در حالت کشش قیمت کاهشی، تبلیغ کاهشی است. اگر مشتریان هر لحظه بیشتر شوند و شدت ورود μ افزایشی باشد، نرخ تبلیغ نیز صعودی است. در ترسیم نمودار بالا، Δ، کارایی تبلیغ، عددی ثابت است (a و δ عدد هستند). تأثیر Δ بر تبلیغ با توجه به دو عامل هزینه تبلیغ a و کشش تبلیغ δ، در تحلیل‌های بالا آمده است.

بر اساس معادله ۸، می‌توان تعداد بلیت موجود در هر لحظه از زمان فروش که عددی مثبت و حقیقی است را ترسیم کرد. تنها به‌ازای مقادیر ثابت کشش قیمت، تابع ۸، به انتگرالی با تابع اولیه قابل‌محاسبه تبدیل می‌شود. به‌ازای مقادیر غیرثابت کشش قیمت، محاسبه تعداد بلیت قابل عرضه منوط به بکارگیری روش‌های عددی در انتگرال‌گیری است و محاسبه تابع اولیه، فرآیندی دشوار است. در این حالت، بعد از یافتن مقادیر به کمک انتگرال‌گیری عددی می‌توان با کمک اسپلاین‌های خطی و روش‌های برازش نمودار در تحلیل عددی، نمودار را با تقریب ترسیم کرد.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

مدل این پژوهش از یک مدل کنترل موجودی با احتساب هزینه‌ها الهام گرفته شده و در آن تغییرات مختلفی اعمال شده است که در مدل‌سازی تشریح شد [۱۵، ۷]. در این پژوهش به کمک کنترل بهینه پویا، سود برگزارکننده یک رخداد ورزشی ـ تفریحی، در فاصله زمانی $[t_0, T]$ بیشینه شد. در این بهینه‌سازی، تعداد بلیت‌های لازم و تعداد بلیت‌های فروش‌نرفته در هر لحظه از زمان نشان داده شده است. قیمت‌گذاری پویای بلیت‌ها در طول دوره برگزاری و

هزینه تبلیغ پویا، محاسبه شده است. به طور خلاصه می‌توان نوآوری‌های این پژوهش را به شرح زیر خلاصه کرد.

در این پژوهش سعی شده است تا حد ممکن هزینه‌ها و نکات مطرح در فروش بلیت رخدادهای ورزشی ـ تفریحی در نظر گرفته شود. مواردی نظیر امکان واگذاری رایگان بلیت، فروش غذا، نوشیدنی، کالاها، بیمه و سایر خدمات به خریداران بلیت لحاظ شده است. با افزودن تابع تغییرات فصلی، مواردی که خارج از کنترل برگزارکنندگان بوده با به‌کارگیری تابع پیوسته ـ تکه‌ای، به نام «شدت ورود»، $\mu(t)$ در تابع تقاضا، اجرا شده است و به کمک کشش تبلیغ با استفاده از دو تابع پیوسته ـ تکه‌ای، امکان ملاحظه موجودی تعداد بلیت‌های فروش‌نرفته روی رفتار خرید مشتریان، از طریق بروزکردن کشش قیمت در طول دوره فروش، از نکات برجسته‌ای هستند که در پژوهش‌های قبلی کمتر
به آن پرداخته شده است و یا اصلاً وارد نشده‌اند. این مدل در مدیریت زنجیره عرضه (با تعیین تعداد بلیت‌هایی که فروخته می‌شوند) نیز قابل‌کاربرد است. درضمن مدل‌های قبلی برای فروش بلیت رخدادهای تفریحی، تنها برای فعالیت‌هایی قابل‌استفاده هستند که یکبار و آن هم اولین دفعه به وقوع می‌پیوندد [۹، ۱۰]. در صورتی‌که این مدل، کاربرد برای چندین بار را دارد و الزام اولین بار اجرا را ندارد.

پژوهش حاضر می‌تواند چراغ راه پژوهش‌های آتی برای مدل‌سازی‌های مختلف برای کارهای پیشنهادی جدید زیر باشد:

این پژوهش قابلیت اجرا در سیستم‌های آنلاین فروش بلیت هواپیما و سایر حمل‌ونقل‌های دیگر را دارد.

مدل ارائه‌شده در این پژوهش از قید برگزاری تنها یک بار آزاد است و می‌تواند برای برنامه هایی که به‌صورت سری و زنجیره‌ای در فواصل زمانی متناوب رخ می‌دهند نیز اجرا شود.

پژوهش‌های تکمیلی می‌تواند با استفاده از مدیریت دانش و ابزارهای هوش مصنوعی، مدلی برای تخمین بهینه پارامترهای مدل معرفی‌شده در این مقاله، ارائه کند. برای نمونه می‌توان از مقاله بلوندت وهمکاران (۲۰۱۹) و مطالعات دیگر در این راستا استفاده کرد[۳] . برای پژوهش های بیشتر می‌توان به حوزه کنترل بهینه احتمالی پرداخت. پژوهشگران علاقمند با ورود به این زمینه از مطالعات می‌توانند گام‌های بلندی در جهت اجرای این فرآیند علمی در محیط‌های واقعی کسب‌وکار بردارند و سهمی در تولید دانش داشته باشند.

ضمیمه: اثبات برخی از روابط

اثبات معادله (۸) ، مسیر بهینه $x(t)$ تعداد بلیت‌های فروش‌نرفته تا زمان t:

مشتق عبارت $\left(x(t)e^{Q(t)}\right)$ برابر است با:

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{Q(t)}\right) = e^{Q(t)}\dot{x(t)} + q(t)x(t)\, e^{Q(t)}$$
$$= -e^{Q(t)}\left(-\dot{x(t)} - q(t)x(t)\right) = -e^{Q(t)}\lambda^{(u)}(t)$$

آخرین تساوی از جایگذاری رابطه (۵)، در پرانتز آخر حاصل شد.

با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی بالا از t تا T و استفاده از فرمول نیوتن- لایپنیتس برای آن می‌توان نوشت:

$$\int_t^T \frac{d}{ds}\left(x(s)e^{Q(s)}\right) \mathrm{ds} = \int_t^T -e^{Q(s)}\lambda^{(u)}(s)\, ds$$
$$x(T)e^{Q(T)} - x(t)e^{Q(t)} = \int_t^T -e^{Q(s)}\lambda^{(u)}(s)\, ds$$

و با توجه به شرط مرزی $x(T) = 0$ رابطه ۸، حاصل می‌شود.

$$x(t) = e^{-Q(t)} \int_t^T e^{Q(s)}\lambda^{(u)}(s)ds \qquad (۸)$$

اثبات معادلات ۱۱ و ۱۲، مسیرهای بهینه زمانی قیمت $p^*(t)$ و تبلیغ $w^*(t)$:

$\mathrm{v(t.u)}$ سود ناخالص در هر لحظه $\boldsymbol{t}$ ، با اضافه‌کردن هزینه تبلیغ برابر است با:

$$\mathrm{v(t.u)} = \mathrm{v(t.p.w)} = e^{-R(t)}\left[\left(p - c(t)\right)\lambda(t.p.w) - w^{a(t)}\right]$$

سود $\mathrm{v(t.u)}$، تابع پیوسته تکه‌ای در t است و برحسب p و w مشتق‌پذیر است. فرض کنید:

$$\pi_1^*(T) = \pi_1(T.u^*)$$

که نمادی برای مقدار بهینه معادله ۷، است و $u^* = (p^*.w^*)$ نشان‌دهنده مقادیر بهینه برای متغیرهای کنترل است. اکنون با توجه به معادله ۱۰، می‌توان نوشت:

$$\pi_1^*(T) = \sup_{u\epsilon U_T} \int_0^T e^{-R(T)}[\big(p(t)-c(t)\big)\lambda^{(u)}(t) - w(t)^{a(t)}]dt \qquad (*)$$
$$= \sup_{u\epsilon U_T} \int_0^T \nu(t.p.w)dt$$

باید قیمت و تبلیغ بهینه‌ای $\big(p^*(t).w^*(t)\big)$ که در $(*)$ صدق کنند را پیدا کرد. برای هر t دلخواه، مشتق تابع نرخ تقاضا $\lambda(t)$ در رابطه ۱) برای متغیرهای کنترل p و w $(p.w > 0)$ وجود داشته و می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}(t.p.w) = -\frac{\varepsilon(t)}{p}\lambda(t.p.w) \qquad (i)$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial w}(t.p.w) = \frac{\delta(t)}{w}\lambda(t.p.w) \qquad (ii)$$

شرط مرتبه اول برای بهینه‌بودن p^* و w^* آن است که مشتقات اول ν نسبت به آن‌ها برابر صفر باشد؛ بنابراین:

$$\frac{\partial\nu}{\partial p}(t.p^*.w) = e^{-R(t)}(\lambda(t.p^*.w) + \big(p^*-c(t)\big)\frac{\partial\lambda}{\partial p}(t.p^*.w))$$
$$= e^{-R(t)}(\lambda(t.p^*.w)\left(1-\varepsilon(t)\frac{p^*-c(t)}{p^*}\right) = 0 \qquad (iii)$$
$$\frac{\partial\nu}{\partial w}(t.p.w^*) = e^{-R(t)}\left(\big(p-c(t)\big)\frac{\partial\lambda}{\partial w}(t.p.w^*) - a(t)w^{*a(t)-1})\right)$$
$$= e^{-R(t)}\left(\frac{\delta(t)}{w^*}\big(p-c(t)\big)\lambda(t.p.w^*) - a(t)w^{*a(t)-1}\right) = 0 \qquad (iv)$$

تساوی طرف دوم در (iii)از جایگذاری رابطه (i) و تساوی آخر در (iv) با قراردادن معادل آن از (ii) حاصل می‌شود. از معادله(iii)داریم:

$$p^* - c(t) = \frac{p^*}{\varepsilon(t)} \qquad (v)$$

از (v)، رابطه ۱۱، حاصل می‌شود:

$$p^*(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t)-1}c(t) \qquad (۱۱)$$

حال تبلیغ بهینه محاسبه می‌شود. با استفاده از قضیه معروف، درفمن[1] و اشتاینر[2] (که در ابتدا در سال ۱۹۵۴طی مقاله‌ای پر استناد، ارائه شد[3]، سپس در کتاب‌های مختلف درسی آمده است)، به‌ازای قیمت و تبلیغ بهینه داریم:

$$\frac{w^{*a(t)}(t)}{p^*(t)\lambda^*(t)}=\frac{\Delta(t)}{\varepsilon(t)} \qquad (vi)$$

در (iv) با لحاظ‌کردن مقدار بهینه قیمت می‌توان نوشت:

$$p^*-c(t)=\frac{a(t)w^{*a(t)}(t)}{\lambda^*(t)\delta(t)}$$

در معادله بالا، با استفاده از (vi) و معادله ۱۱، می‌توان نوشت:

$$\frac{w^{*a(t)}(t)}{\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t)-1}c(t)}=\frac{\Delta(t)\lambda^*(t)}{\varepsilon(t)}$$

به‌جای $\lambda^*(t)$ معادل آن از رابطه ۴، قرار داده می‌شود. با محاسبات جبری معادله ۱۲، حاصل می‌شود.

$$w^*(t)=c_w(t)\left(\frac{\mu(t)}{c(t)^{\varepsilon(t)-1}}\right)^{\frac{1}{a(t)-\delta(t)}} \qquad (۱۲)$$

اما شروط (iii) و (vi) شرط لازم برای بیشینه‌شدن (v) است. شرط کافی برای آنکه قیمت و تبلیغ محاسبه‌شده در معادلات ۱۱، ۱۲ و (v) را بهینه کنند، آن است که ماتریس هشین v نسبت به مقادیر بهینه آن‌ها معین منفی باشد؛ اما مشتقات مرتبه دوم تابع v عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\big(t.p^*(t).w^*(t)\big)=-(\varepsilon(t)-1)e^{-R(t)}\frac{\lambda^*(t)}{p^*(t)}<0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\big(t.p^*(t).w^*(t)\big)=-a(t)(a(t)-\delta(t))e^{-R(t)}w_{(t)}^{*a(t)-2}<0$$

---

۱. Dorfman Robert

۲. Steiner Peter O.

۳. Dorfman, Robert, and Peter O. Steiner. (1954) Optimal Advertising and Optimal Quality. *American Economic Review 44*, 826-36.

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial p \partial w}\big(t.p^*(t).w^*(t)\big) = \delta(t)e^{-R(t)}\frac{\lambda^*(t)}{w^*(t)}\left(1-\varepsilon(t)\frac{p^*-c(t)}{p^*}\right) = 0$$

ماتریس هشین ν نسبت به $p^*(t)$ و $w^*(t)$ برای هر t، معین منفی است، زیرا:

$$H = \frac{\partial^2 \nu}{\partial_{pw}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \nu}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 \nu}{\partial p \partial w} \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial w \partial p} & \frac{\partial^2 \nu}{\partial w^2} \end{bmatrix}$$

$$|H_1| = -(\varepsilon(t)-1)e^{-R(t)}\frac{\lambda^*(t)}{p^*(t)} < 0$$

$$|H_2| = (\frac{\partial^2 \nu}{\partial p^2} \times \frac{\partial^2 \nu}{\partial w^2} - 0) > 0$$

بنابراین قیمت و تبلیغ معرفی‌شده در معادلات ۱۱ و ۱۲، تابعی هدف $\pi_1^*(T)$ را ماکزیمم می کنند.

منابع

1. Adeli, M. & Zandieh, M. (2013). submit the multi-objective simulation optimization approach for the integrated sourcing model and inventory decisions. *Journal of Industrial Management Perspective, 11(3),* 89-110. (In Persian)
2. Asgharizadeh, A. Mohaghar, A. & Taghavi, N (2015). Designing a model for probable mutibjective planning for optimal capacity of electricity energy. *Journal of Industrial* Management *Perspective, 22(1),* 67-90. (In Persian).
3. Blondet, G. Le Duigou, J. & Boudaoud, N. (2019). A KBS for numerical design of experiments processes in mechanical engineering. *Expert system with application, 122,* 289-302.
4. Blourian Tehrani, M. (2014). *Pricing in simple words*. Tehran, Corporate of commercial publishing. (In Persian)
5. Feng, Y., & Gallego, G. (1995). Optimal starting times for end-of-season sales and optimal stopping times for promotional fares. *Management Sciences, 41 (8),* 1371–1391.
6. Gallego, G., & van Ryzin, G., (1994). Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management Sciences, 40(8),* 999–1020
7. Helmes, K., Schlosser, R. & Weber, M. (2013). Dynamic advertising and pricing in a class of general new-product adoption models. *European Journal of Operational Research, 229(2)* 433-443.
8. Intriligator, M, D. (2008). *Mathematical optimization, and economic theory*. (translated by Pourkazemi M.H.) Tehran. Publication of Shahid Beheshti. (In Persian).
9. Jørgensen, S., Kort, P.M., & Zaccour, G. (2009). Optimal pricing and advertising policies for an entertainment event. *Journal of Economic Dynamics and Control. 33(3),* 583–596.
10. Jørgensen, S., & Zaccour, G. (2019). Optimal pricing and advertising policies for a one-time entertainment event. *Journal of Economic Dynamics and Control, 100,* 395-416
11. Klima, I. (1995). *The Spirit of Prague* (Deyhimi, kh). Tehran, publication of Ney. (In Persian).
12. Kuper, S. (2006) *Soccer against the enemy*. (Translated by Ferdosipour, A). Tehran, Nashre Cheshmeh. (In Persian)
13. Laudon, K. (2013). *E-Commerce Marketing*. (Arbab, H, R). Tehran. Publication of Ney. (In Persian).
14. Pourkazemi, M, H. (2015). *Dynamic Optimization, Optimal Control and its applications.* Tehran. Publication of Shahid Beheshti. (In Persian).
15. Rajan, A., Rakesh and Steinberg, R. (1992). Dynamic pricing and ordering decisions by a monopolist. *Management Sciences 38(2),* 240–262.
16. Sethi, S. P., Prasad, A. & He, X. (2008). Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model. *Journal of Optimization Theory and Applications 139(2),* 351–360.
17. Schlosser, R. (2015). A stochastic dynamic pricing and advertising model under risk aversion. *Journal of Revenue Pricing Management, 14(6),* 451–468.
18. Schlosser, R. (2016), Joint Stochastic Dynamic Pricing and Advertising with Time-Dependent Demand. *Journal of Economic Dynamics and Control,* 73, Pages 439-452

19. Taleizadeh, A., & Mohammadi, R. (2015). Optimization of sale price and advertising cost in a two-level supply chain includes one manufacturer and two retailers. *Journal of Industrial Management Perspective, 18(2),* 107-127. (In Persian).
20. Weber, M. (2015). Optimal Inventory Control in the Presence of Dynamic Pricing and Dynamic Advertising, DISSERTATION, Humboldt-University, Germany.