Industrial Management Perspective

Print ISSN: 2251-9874, Online ISSN: 2645-4165
Volume 11, Serial Number 44, Winter 2022, Pages 223-252 (Original Article)
DOI: 10.52547/JIMP.11.4.223

An Economic Production Quantity Model with Probabilistic Machine Breakdown and Multiple Shipments Policy

Seyed Akbar Taheri[*], Hadi Mokhtari[**], Ali Fallahi[***]

Abstract

The classical economic production quantity (EPQ) model was developed to manage inventory costs in companies last decade ago. This model is extended in various directions in recent years. The classic EPQ has some unrealistic assumptions. The model assumes that all products are perfect, while the production of defective items is inevitable in the real-world environment. Another assumption relates to the continuous demand satisfaction, which ignores the commonly used multiple shipments policy in practice. Finally, the classic model does not consider the probabilistic breakdown of the machine and the required maintenance activities. The present work aims to develop a new imperfect EPQ model under probabilistic machine failure, corrective maintenance, and multiple shipments policy. Two cases are investigated: 1- Considering the production of a fixed percentage of imperfect items 2- Considering no production of defective items. Due to the complexity of the problem, a numerical bisection method is utilized to solve the problem and finding the best possible production time. This method's performance is evaluated by comparing it to the obtained solutions by MATLAB optimization toolbox for genetic and simulated annealing algorithms. Sensitivity analysis is performed, and finally, some directions for future research are suggested.

Keywords: Inventory Planning; Economic Production Quantity; Probabilistic Corrective Maintenance; Multiple Shipments Policy; Imperfect Quality Items.

Received: Apr. 16, 2021; Accepted: Agu. 09, 2021.
* Master Student, Tarbiat Modares University
** Associate Professor, Kashan University (Correspond Author).
Email:Mokhtari_ie@kashanu.ac.ir
*** Master Student, Sharif University of Technology.

چشم‌انداز مدیریت صنعتی

شاپای چاپی: ۹۸۷۴-۲۲۵۱، شاپای الکترونیکی: ۴۱۶۵-۲۶۴۵

سال یازدهم، شماره ۴۴، زمستان ۱۴۰۰، ص‌ص ۲۲۳ – ۲۵۲ (**نوع مقاله: پژوهشی**)

DOI: 10.52547/JIMP.11.4.223

توسعه مدل مقدار اقتصادی تولید با درنظرگرفتن خرابی احتمالی ماشین، تولید اقلام معیوب و سیاست ارسال چندگانه

سیداکبر طاهری*، هادی مختاری، علی فلاحی*****

چکیده

مدل مقدار اقتصادی تولید (EPQ) چندین دهه قبل برای مدیریت هزینه‌های موجودی ارائه شد و از آن زمان تاکنون به‌طور گسترده مورداستفاده قرار گرفته است. در سال‌های اخیر پژوهشگران توسعه‌های گوناگون مدل EPQ را ارائه داده‌اند. در مدل کلاسیک، فرض بر این است اقلام با کیفیت مناسب تولید می‌شوند؛ درحالی‌که در واقعیت، تولید اقلام معیوب امری اجتناب‌ناپذیر است. از دیگر مفروضات مدل، رفع پیوسته تقاضای سیستم است؛ درحالی‌که در عمل، سیاست ارسال چندگانه مورداستفاده قرار می‌گیرد؛ همچنین در مدل کلاسیک هیچ فرضی در ارتباط با نگهداری و تعمیرات و خرابی ماشین لحاظ نشده است. در محیط‌های تولیدی همواره از نگهداری و تعمیرات، با هدف جلوگیری از اختلال در فرآیند تأمین تقاضای مشتریان استفاده می‌شود. در این پژوهش یک مدل EPQ با در نظرگرفتن نگهداری و تعمیرات اصلاحی با تولید اقلام معیوب به همراه سیاست ارسال چندگانه بررسی شده است. هدف، به‌دست‌آوردن مدت‌زمان بهینه تولید است که از طریق آن، هزینه‌ی کل سیستم حداقل می‌شود. دو نمونه از این مدل تحلیل شده است. مورد نخست، سیستم با درنظرگرفتن تولید اقلام معیوب است. مورد دوم، به سیستمی با نرخ اقلام معیوب صفر اختصاص دارد. در این رابطه، توابع هدف موردنظر استخراج شده و برای حل مدل، روش عددی «دوبخشی» به‌کار رفته است.

کلیدواژه‌ها: برنامه‌ریزی موجودی؛ مقدار اقتصادی تولید؛ نگهداری و تعمیرات اصلاحی احتمالی؛ سیاست ارسال چندگانه؛ اقلام معیوب.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۲۷، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۱۸.

* دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس.

** دانشیار، دانشگاه کاشان (نویسنده مسئول).

Email: Mokhtari_ie@kashanu.ac.ir

*** دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف.

۱. مقدمه

امروزه شرکت‌ها و سازمان‌ها به‌تناسب فعالیت و مأموریت خود به شکل‌های مختلفی از قبیل خرید، انتقال، استفاده، نگهداری، توزیع و یا فروش، با مواد و موجودی‌ها سروکار دارند. مدیریت مواد و موجودی‌ها به‌عنوان یکی از ابزارهای مدیریت عملیات و تولید در زنجیره تأمین، تأثیر مستقیمی بر عملکرد مالی، تولیدی و بازاریابی شرکت‌ها دارد؛ به‌طوری‌که مدیریت کارآمد مواد و موجودی‌ها موجب افزایش سوددهی شرکت‌ها می‌شود. در گذشته امور مربوط به طراحی، تأمین مالی و تولید از اساسی‌ترین دغدغه‌های مدیریت به‌شمار می‌رفت و به‌طور سنتی بیشترین تمرکز مدیریت و بودجه سازمان به منابع انسانی و تأمین تجهیزات اختصاص می‌یافت و کنترل موجودی امری ساده و پیش‌پاافتاده به‌شمار می‌رفت؛ زیرا سازمان‌ها موادی را که نیاز داشتند به‌طور ثابت خریداری می‌کردند و مازاد آن‌ها را به تأمین‌کننده عودت می‌دادند. با گسترش حوزه‌های تخصصی فعالیت شرکت‌ها و افزایش تعداد و تنوع مواد و همچنین پیچیده‌ترشدن محصولات تولیدی، مواد اولیه، مواد در جریان ساخت و زیر مونتاژها، برنامه‌ریزی و کنترل موجودی‌ها نیز پیچیده‌تر شد. این موضوع باعث شد تا نیاز به مهارت‌های جدید مدیریت مواد و موجودی‌ها در سطح صنایع مختلف افزایش یابد. از طرفی تأثیر مدیریت مواد بر قیمت نهایی محصول امری اجتناب‌ناپذیر است؛ به‌طوری‌که امروزه در صنایع تولیدی هزینه‌ی مواد بیشترین سهم از هزینه‌ها را به خود اختصاص داده است.

در این پژوهش، دو مدل کنترل موجودی به‌منظور یافتن مقدار بهینه زمان تولید، در شرایطی که تعداد خرابی ماشین در چرخه تولیدی یک متغیر تصادفی پواسون باشد، درصد ثابتی از کالاهای تولیدی هر چرخه معیوب باشند و سیاست ارسال کالاها، سیاست ارسال چندگانه باشد، ارائه شده است. برای حل مدل‌ها و یافتن مقدار بهینه‌ی متغیر تصمیم از روش عددی دوبخشی استفاده شده است و کارایی این روش عددی با مقایسه با الگوریتم‌های ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید در رابط کاربری نرم‌افزار متلب مقایسه شده است. در ادامه و در بخش ۲، مروری بر پژوهش‌های قبلی مرتبط با موضوع این پژوهش صورت می‌گیرد. در بخش ۳، مدل‌سازی مسئله موردنظر مدل‌سازی و تشریح می‌شود. در بخش ۴، به‌منظور ارزیابی و تحلیل عملکرد مدل‌های پیشنهادی، یک مثال عددی حل شده و نتایج خروجی آن مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌گیرند. در بخش ۵، جمع‌بندی مطالب این پژوهش و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه خواهد شد.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

موضوع کنترل موجودی‌ها و تصمیم‌گیری در مورد متغیرهای سیستم موجودی همواره در کانون توجه مدیران قرار داشته است. مدل‌های ابتدایی توسعه‌داده‌شده، مدل‌های بسیار ساده‌ای بودند که بسیاری از مفروضات دنیای واقعی را در نظر نمی‌گرفتند. با گذشت زمان، مدل‌های جدیدی توسط

پژوهشگران، با هدف نزدیک‌ترکردن پژوهش‌های پیشین به محیط دنیای واقعی ارائه شدند. در ادامه مرور مبانی نظری، ابتدا مدل‌های کلاسیک کنترل موجودی معرفی خواهد شد. در ادامه، مروری بر مبانی نظری مسائلی صورت می‌گیرد که یک یا چند فرض از فرض‌های اصلی این پژوهش را موردبررسی قرار داده‌اند. این مفروضات عبارت‌اند از:

ـ فرض سیاست نگهداری و تعمیرات؛

ـ فرض تولید اقلام معیوب؛

ـ فرض سیاست ارسال چندگانه.

مدل مقدار اقتصادی سفارش. مدل کلاسیک مقدار سفارش اقتصادی را می‌توان نخستین و ساده‌ترین مدل موجودی دانست. این مدل توسط هریس[1] (۱۹۱۳) معرفی شد [۱۲]. هدف این مدل تعیین مقدار بهینه سفارش‌دهی در یک سیستم موجودی است؛ به‌نحوی‌که مجموع هزینه‌های آن سیستم حداقل شود. از جمله مفروضات این مدل، قطعیت پارامترها، دریافت آنی سفارش‌ها و مجازنبودن کمبود است. این مدل در سال‌های بعد توسط پژوهشگران دیگری با فرض‌های متفاوتی توسعه داده شد تا به دنیای واقعی نزدیک‌تر شود. برای مثال چنگ[2] (۱۹۹۱)، فرض کیفیت کامل اقلام تولیدی در مدل EOQ را غیرواقعی دانست [۴]. فرض‌های دیگری نیز مانند فرض درنظرگرفتن کمبود، فرض احتمالی‌بودن تقاضا، فرض تحویل گسسته اقلام، فرض چندکالایی بودن سیستم و بسیاری دیگر از فرض‌ها توسط پژوهشگران مختلف برای توسعه این مدل ارائه شد [۱۳,۲۴,۱۹,۱۱,۲۰,۲۳].

مدل مقدار اقتصادی تولید. مدل کلاسیک مقدار اقتصادی تولید، به‌عنوان یکی از پایه‌ای‌ترین مدل‌ها در زمینه مدیریت و کنترل موجودی‌های سیستم‌های تولیدی، توسط تفت[3] (۱۹۱۸) معرفی شد. این مدل، توسعه‌ای از مدل مقدار اقتصادی سفارش است که دریافت تدریجی کالا را در نظر می‌گیرد. از مصادیق این مدل، تولید محصول در سیستم به‌صورت تدریجی در شرکت یا دریافت تدریجی سفارش از تأمین‌کننده خارجی است. با وجود استفاده گسترده از این مدل، وجود برخی مفروضات غیرواقعی باعث شد تا پژوهشگران، توسعه‌های مختلفی از این مدل ارائه کنند [۳۳]. برای مثال، روزنبلات و لی[4] (۱۹۸۶) بـه این نتیجه رسیدند که درنظرگرفتن اقلام معیوب در فرایند تولید امری ضروری است؛ چراکه این موضوع باعث کاهش اندازه دسته تولید می‌شود. آن‌ها یک مدل مقدار اقتصادی تولید با فرض وجود اقلام معیوب را پیشنهاد کردند [۳۰].

1. Harris
2. Cheng
3. Taft
4. Rosenblatt & Lee

فرض‌های دیگری همچون فرض دوباره‌کاری اقلام معیوب، فرض تولید هم‌زمان چند کالا، فرض وجود کمبود، فرض تحویل کالا به‌صورت گسسته، فرض فسادپذیری اقلام و بسیاری از مفروضات دیگر نیز در سالیان اخیر موردتوجه پژوهشگران قرار گرفته است.

مدل‌های موجودی با درنظرگرفتن سیاست نگهداری و تعمیرات. از جمله مسائلی که تاکنون کمتر موردتوجه پژوهشگران در زمینه مدل‌های تولیدی قرار گرفته، مسئله خرابی ماشین است. بدیهی است که ماشین تولیدکننده در یک خط تولید ممکن است در زمان انجام ماشین‌کاری با خرابی‌های تصادفی مواجه شود. این موضوع ضرورت به‌کارگیری سیاست نگهداری و تعمیرات را توجیه می‌کند. به‌کارگیری برنامه نگهداری و تعمیرات در یک خط تولید می‌تواند باعث افزایش قابلیت اطمینان شود؛ همچنین با توجه به استهلاک و فرسایش مداوم ماشین‌آلات و ماشین‌ها، برنامه‌ی نگهداری و تعمیرات مناسب، بخش عمده‌ای از هزینه‌های تولید را در یک مجموعه صنعتی کاهش می‌دهد. عملیات نگهداری و تعمیرات شامل فعالیت‌های مختلفی از قبیل تنظیم، تعمیر و حتی تعویض قطعات نیز می‌شود. تاکنون بیشتر پژوهش‌های انجام‌شده روی یک مدل EPQ با درنظرگرفتن عملیات نگهداری و تعمیرات با این فرض انجام شده است که عملیات نگهداری و تعمیرات پس از اتمام چرخه تولید فعلی و تا قبل از شروع چرخه تولید بعدی صورت می‌گیرد. درواقع در این پژوهش‌ها عملیات نگهداری و تعمیرات تأثیر مستقیم بر فرایند تولید ندارد و پس از پایان فرایند تولید صورت می‌گیرد. در این پژوهش فرض بر انجام عملیات نگهداری و تعمیرات به‌صورت تصادفی و در حین فرآیند تولید است. این سیاست، «سیاست نگهداری و تعمیرات اصلاحی»[1] نام دارد. فعالیت‌های نگهداری و تعمیرات اصلاحی، تمامی فعالیت‌هایی هستند که با هدف حفظ تجهیزات در سطح استاندارد، در هنگام بروز شکست و پدیدارشدن عیب انجام می‌شوند. درواقع در هنگام تولید، درصورتی‌که ماشین به‌صورت احتمالی دچار خرابی شود، به‌منظور تعمیر ماشین، نگهداری و تعمیرات اصلاحی صورت می‌گیرد. در این شرایط، تمامی ماشین‌ها و ماشین‌آلات تعمیر می‌شوند تا از توقف طولانی عملیات تولید جلوگیری شود.

چیو و همکاران[2] (۲۰۱۰)، برای نخستین بار موضوع خرابی احتمالی ماشین‌آلات را بررسی کردند [۸]. تینگ و همکاران[3] (۲۰۱۱)، به بررسی بیشتر همین مدل با درنظرگرفتن مفروضاتی در ارتباط با دوره‌های ثابت انجام نگهداری و تعمیرات و وجود اقلام معیوب در سیستم پرداختند [۳۴]. طالعی‌زاده و همکاران[4] (۲۰۱۷)، خرابی احتمالی ماشین‌آلات در یک سیستم تولیدی را در شرایطی بررسی کردند که بخشی از کالاهای تولیدی معیوب بود و ارسال کالاها به‌صورت

1. Corrective maintenance
2. Chiu, et al.
3. Ting, et al.
4. Taleizadeh, et al.

گسسته انجام می‌شد [۳۲]؛ همچنین از دیرباز شبیه‌سازی سیستم‌های نگهداری و تعمیرات موردتوجه پژوهشگران بوده است. تسائو و همکاران[1] (۲۰۲۰)، مدل تولید اقتصادی با دوباره‌کاری اقلام معیوب را در شرایطی توسعه دادند که ملاحظات مربوط به نگهداری و تعمیرات پیشبینانه[2] نیز لحاظ شده بود [۳۵]. لای و همکاران[3] (۲۰۱۹)، یک استراتژی نگهداری و تعمیرات ترکیبی را برای مدل مقدار اقتصادی تولید با اقلام معیوب ارائه کردند. کمبود کالا در این سیستم مجاز بود [۱۸]. مختاری و اسدخانی[4] (۲۰۲۰)، مدل تولید اقتصادی با درنظرگرفتن نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه و تولید اقلام معیوب را ارائه دادند. سیاست آن‌ها برای مواجه با اقلام معیوب، دورریز آن‌ها بود [۲۱].

مدل‌های موجودی با درنظرگرفتن فرض وجود اقلام معیوب. یکی از اتفاقات محیط‌های تولید در دنیای واقعیت، تولید اقلام معیوب است که در مدل کلاسیک EPQ در نظر گرفته نشده است. در بسیاری از پژوهش‌های پیشین فرض بر این بود که کیفیت تمامی قطعات تولیدی، کامل و مناسب است؛ بااین‌حال در عمل ممکن است به‌واسطه عوامل مختلف، مانند کیفیت پایین تولید، وجود مواد اولیه معیوب و غیره، قطعاتی با کیفیت پایین تولید شوند. در سال‌های اخیر، مسئله مقدار تولید اقتصادی بـا درنظرگرفتن تولید قطعات معیوب از سـوی پژوهشگران موردتوجه قرار گرفته است..

روزنبلات و لی[5] (۱۹۸۶)، بـه ایـن نتیجـه رسیدند که درنظرگرفتن اقلام معیوب در فرایند تولید سبب کاهش اندازه دسته تولید می‌شود و یک مدل تولیدی با فرض وجود اقلام معیوب را پیشنهاد کردند [۳۰]. هیک و سلامه[6] (۲۰۰۱)، یک مدل EPQ را برای حالتی که درصد تولید کالای معیوب دارای توزیع یکنواخت است، توسعه دادند. از مهم‌ترین فرض‌های مدل پیشنهادی آن‌ها، دوباره‌کاری تمام اقلام معیوب بود [۱۴]. چیو[7] (۲۰۰۳)، مدل هیک و سلامه[8] (۲۰۰۱) را با این فرض که تنها بخشی از اقلام معیوب نیازمند فرایند دوباره‌کاری هستند، توسعه داد [۷]. جمال و همکاران[9] (۲۰۰۴)، یک مدل EPQ را با درنظرگرفتن فرایند دوباره‌کاری بهینه کردند [۱۵]. پس از آن، بارون[10] (۲۰۰۸)، اصلاحاتی در ارتباط با روش حل مسئله بر روی مدل جمال و همکاران[11] (۲۰۰۴) انجام داد [۲].

1. Tsao, et al.
2. Predictive maintenance
3. Lai, et al.
4. Mokhtari & Asadkhani
5. Rosenblatt & Lee
6. Hayek & Salameh
7. Chiu
8. Hayek & Salameh
9. Jamal, et al.
10. Barrón
11. Jamal, et al.

چیو و همکاران[1] (۲۰۰۷)، مدل EPQ را با درنظرگرفتن تولید اقلام معیوب به همراه خرابی‌های احتمالی ماشین بررسی کردند [۵]. نیاکی و همکاران[2] (۲۰۱۰)، به توسعه مدل EPQ در شرایط تولید ضایعات در فرآیند دوباره‌کاری پرداختند [۲۵]. رضایی[3] (۲۰۱۶)، در پژوهش خود به این نتیجه رسید که سیاست بازرسی ۱۰۰ درصد در مدل سفارش اقتصادی با اقلام معیوب از نظر اقتصادی چندان به‌صرفه نیست و یک طرح بازرسی مبتنی بر نمونه‌گیری را پیشنهاد داد [۲۸]. نوآوری پژوهش کاظمی و همکاران[4] (۲۰۱۸)، لحاظ‌کردن انتشار کربن در مدل سفارش اقتصادی با اقلام معیوب بود [۱۷]. نوبیل و همکاران[5] (۲۰۲۰)، مسئله تعیین نقطه‌ی سفارش مجدد در مدل سفارش اقتصادی را با درنظرگرفتن اقلام معیوب بررسی و تحلیل کردند [۲۶]. مختاری و همکاران[6] (۲۰۲۱)، مدل‌های تولید اقتصادی با اقلام معیوب را با لحاظ‌کردن محدودیت‌های مختلفی از قبیل فضای انبار، تعداد بارهای راه‌اندازی تولید، بودجه دردسترس و غیره فرموله کردند. آن‌ها برای حل مدل از روش تحلیلی مبتنی بر بهینه‌سازی لاگرانژ بهره گرفتند [۲۲]. اسدخانی و همکاران[7] (۲۰۲۱)، تأثیر یادگیری در فرآیند بازرسی را در مدل سفارش اقتصادی بررسی کردند. در این پژوهش، سیاست‌های مختلفی از قبیل دورریز، بازگشت به تأمین‌کننده و دوباره‌کاری برای اقلام معیوب لحاظ شده بود [۱].

مدل‌های موجودی با درنظرگرفتن فرض سیاست ارسال چندگانه. یک کارخانه تولیدی را در نظر بگیرید که کالایی خاص تولید می‌کند. این کالا از طریق یک زنجیره تأمین به دست مشتری خواهد رسید. در حالت ساده با فرض اینکه زنجیره تأمین بین کارخانه و مصرف‌کننده دارای دو سطح عمده‌فروش و خرده‌فروش باشد، وظیفه کارخانه پاسخ به تقاضای عمده‌فروش است. فرآیند رفع تقاضا می‌تواند به دو صورت انجام شود: ۱. عمده‌فروشان به‌طور مستقیم به کارخانه مراجعه و نیاز خود را برطرف کنند. این نوع از رفع تقاضا در محیط‌های یکپارچه فروشنده و خریدار کمتر به وقوع می‌پیوندد؛ ۲. کارخانه خود نیاز عمده‌فروش را از طریق ارسال کالا برطرف می‌کند. در این حالت دیگر نیازی به مراجعه عمده‌فروشان به کارخانه نیست. در این حالت سطح موجودی انبار کارخانه به‌صورت گسسته کاهش می‌یابد. در بیشتر مدل‌های توسعه داده‌شده تاکنون، موضوع روش ارسال محصولات کمتر موردتوجه قرار گرفته است. بیشتر این پژوهش‌ها، یک سیاست پیوسته را برای رفع تقاضا در نظر گرفته‌اند. ارسال کالا در دنیای واقعی

1. Chiu, et al.
2. Niaki, et al.
3. Rezaei
4. Kazemi, et al.
5. Nobil, et al.
6. Mokhtari, et al.
7. Asadkhani, et al.

به دو صورت انجام می‌شود: ۱. ارسال پیوسته و ۲. ارسال چندگانه. عامل تعیین‌کننده و مهم برای انتخاب شیوه ارسال، فاصله کارخانه تولیدی تا سطح بعدی زنجیره است. ازآنجاکه در دنیای واقعی، به‌طور معمول فاصله کارخانه تولیدی تا سطح بعدی زنجیره تأمین قابل‌توجه است، سیاست ارسال چندگانه مورداستفاده قرار می‌گیرد.

تعدادی از پژوهش‌های پیشین، مدل EPQ را با درنظرگرفتن سیاست ارسال چندگانه بررسی کرده‌اند. نخستین مدل کنترل موجودی با درنظرگرفتن سیاست ارسال چندگانه توسط چیو و همکاران[۱] (۲۰۱۱)، ارائه شد [۹]. چیو و همکاران[۲] (۲۰۱۲) همچنین به بررسی بیشتر این سیاست پرداختند و فرضیه‌هایی را به مدل خود اضافه کردند [۶]. پس از آن بارون و همکاران[۳] (۲۰۱۳)، توسعه‌ای روی مدل چیو[۴] (۲۰۱۱)، اعمال کردند که در آن، تعداد دفعات حمل‌ونقل در سیاست ارسال چندگانه به‌عنوان یک متغیر تصمیم لحاظ شده بود [۳]. نوآوری پژوهش ریتا و مارتین[۵] (۲۰۱۳)، درنظرگرفتن هزینه‌های بسته‌بندی در مدل تولید اقتصادی با سیاست ارسال چندگانه‌ای بود که در آن، اقلام معیوب تولیدی دچار دوباره‌کاری می‌شدند [۲۹]. پژوهش‌های دیگری نیز وجود دارند که از سیاست ارسال چندگانه در مدل پیشنهادی خود استفاده کرده‌اند. بااین‌حال تمرکز اصلی این پژوهش‌ها بر موضوعات دیگری همچون قیمت‌گذاری، زنجیره تأمین و غیره بوده است. برای مثال، طالعی‌زاده و همکاران[۶] (۲۰۱۶)، موضوع قیمت‌گذاری در سیستم‌های موجودی را همراه با سیاست ارسال چندگانه و امکان دوباره‌کاری اقلام معیوب مطرح کردند [۳۱]. پاریان و یوتایاکومار[۷] (۲۰۱۷)، سیستم تولید ـ موجودی با سیاست ارسال چندگانه‌ای را موردمطالعه قرار دادند که در آن، هزینه سفارش‌دهی به میزان سرمایه‌گذاری وابسته بود. بخشی از اقلام تولیدی این سیستم، معیوب بودند و می‌توانستند از طریق دوباره‌کاری به سیستم بازگردند. با توجه به پیچیدگی مسئله، یک روش ابتکاری برای حل مسئله پیشنهاد شد [۲۷]. کلانتری و طالعی‌زاده[۸] (۲۰۲۰)، فرض سیاست ارسال چندگانه را برای مدل تولید اقتصادی اقلام فسادپذیر مطرح کردند. مقدار بهینه متغیرهای تصمیم این مدل از طریق روش‌های مشتق‌گیری به‌دست آمد [۱۶]. فلاحی و همکاران[۹] (۲۰۲۱)، یک مدل مقدار اقتصادی تولید با درنظرگرفتن نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه و ارسال چندگانه‌ی محصولات را توسعه دادند. فرض تولید اقلام معیوب و دورریز آن‌ها نیز در سیستم کنترل موجودی وجود داشت. آن‌ها از روش تحلیلی مبتنی

1. Chiu, et al.
2. Chiu, et al.
3. Barrón, et al.
4. Chiu, et al.
5. Ritha and Martin
6. Taleizadeh, et al.
7. Priyan & Uthayakumar
8. Kalantari & Taleizadeh
9. Fallahi, et al.

بر مشتق‌گیری برای حل سیستم پیشنهادی استفاده نمودند [۱۰]. خلاصه نتایج مرور مبانی نظری در جدول ۱، نشان داده شده است.

با توجه مرور مبانی نظری، می‌توان نتیجه گرفت که تاکنون موضوع خرابی احتمالی ماشین‌آلات چندان در سیستم‌های کنترل موجودی موردبررسی قرار نگرفته است؛ همچنین مفروضات مربوط به تولید اقلام معیوب و ارسال چندگانه محصولات نیز از مفروضات دنیای واقعی هستند که در سال‌های اخیر توجه زیادی را در مبانی نظری به خود جلب کرده‌اند. با وجود بررسی هر یک از این مسائل به‌صورت مجزا، در حال حاضر مدل یکپارچه‌ای وجود ندارد که هر سه مورد را به‌صورت هم‌زمان لحاظ کرده باشد؛ درنتیجه هدف پژوهش حاضر، ارائه یک مدل مقدار اقتصادی تولید در شرایطی است که بخشی از کالاهای تولیدی معیوب هستند و سیاست تحویل کالا به مشتریان، سیاست ارسال چندگانه است؛ به‌علاوه خرابی تصادفی ماشین در طول چرخه تولیدی و نگهداری و تعمیرات اصلاحی نیز در مدل پیشنهادی ~~دیده شده است~~ لحاظ می‌شود.

جدول ۱. جدول مروری مسائل مرتبط در مبانی نظری

پژوهشگر (سال)	نوع مدل	نگهداری و تعمیرات	سیاست نگهداری و تعمیرات	اقلام معیوب
چیو و همکاران، (۲۰۱۱) [۹]	EPQ	×	×	✓
چیو و همکاران، (۲۰۱۲) [۶]	EPQ	×	×	✓
بارون و همکاران، (۲۰۱۳) [۳]	EPQ	×	×	✓
ریتا و مارتین، (۲۰۱۳) [۲۸]	EPQ	×	×	✓
طالعی‌زاده و همکاران، (۲۰۱۶) [۳۱]	EPQ	×	×	✓
پاریان و یوتایاکومار، (۲۰۱۷) [۲۸]	EPQ	×	×	✓
کلانتری و طالعی‌زاده، (۲۰۲۰) [۱۶]	EPQ	×	×	×
فلاحی و همکاران، (۲۰۲۱) [۱۰]	EPQ	✓	پیشگیرانه	✓
پژوهش حاضر	EPQ	✓	اصلاحی	✓

مدل پیشنهادی. ابتدا یک مدل EPQ به همراه سیاست ارسال چندگانه همراه و وجود اقلام معیوب فرموله می‌شود. در ادامه، توسعه‌ای از همین مدل با درنظرگرفتن یک بار خرابی احتمالی ماشین در بازه تولید ارائه خواهد شد. در انتها مدل دوم، با فرض نبود اقلام معیوب در سیستم بررسی می‌شود.

مفروضات مدل‌ها. مفروضات مدل‌ها عبارت‌اند از:

ـ نرخ تقاضا ثابت است؛

ـ از اقلام تولیدشده در یک چرخه برای رفع تقاضا در مدت‌زمان مصرف همان چرخه و در مدت‌زمان مصرف چرخه بعدی استفاده می‌شود؛

ـ هیچ نوع کمبودی مجاز نیست؛

ـ ارسال چندگانه برای تحویل کالا تنها توسط یک وسیله نقلیه صورت می‌پذیرد؛

ـ در شرایط نبود خرابی در سیستم، نرخ تولید کالای سالم بزرگ‌تر مساوی نرخ مصرف است؛

ـ در شرایط وجود خرابی در سیستم، نرخ تولید کالای سالم در زمان فعالیت و عدم‌خرابی دستگاه، بزرگ‌تر مساوی نرخ مصرف است.

پارامترها. پارامترهای لحاظشده به شرح زیر است:

λ: نرخ تقاضا (واحد کالا/ واحد زمان)

P: نرخ تولید (واحد کالا/ واحد زمان)

H: حداکثر مقدار موجودی بعد از اتمام فرآیند تولید زمانی که خرابی ماشین رخ نداده باشد (واحد کالا)

β: متوسط تعداد خرابی ماشین در سال (پارامتر توزیع پواسون)

n: تعداد ارسال‌ها برای برآورده‌کردن تقاضا

d: نرخ تولید اقلام معیوب (واحد کالا/ واحد زمان)

θ: درصد تولید اقلام معیوب

C: هزینه تولید هر واحد کالا (واحد هزینه/ واحد کالا)

h: هزینه نگهداری واحد کالا (واحد هزینه/ واحد کالا/ واحد زمان)

K: هزینه راه‌اندازی یک چرخه تولید (واحد هزینه/ واحد راه‌اندازی)

K_1: هزینه ثابت هر بار ارسال (واحد هزینه/ واحد ارسال)

C_s: هزینه دفع ضایعات (واحد هزینه/ واحد کالا)

t_r: مدت‌زمان لازم برای تعمیر ماشین (واحد زمان)

M: هزینه یک بار تعمیر ماشین (واحد هزینه/ واحد تعمیر)

متغیرها

متغیرهای اصلی

t_1: مجموع مدت‌زمان تولید ماشین (واحد زمان)

متغیرهای وابسته

t: مدت‌زمان تولید قبل از خرابی احتمالی (واحد زمان)

t_2': مدت‌زمان لازم برای مصرف کالاها زمانی که خرابی ماشین رخ داده باشد (واحد زمان)

T: مدت‌زمان لازم برای مصرف کالاها زمانی که خرابی ماشین رخ نداده باشد (واحد زمان)

T': مدت‌زمان چرخه زمانی که خرابی ماشین رخ نمی‌دهد (واحد زمان)

Q: مقدار تولید در هر دوره (واحد کالا)

H_1: حداکثر مقدار تولید قبل از خرابی ماشین (واحد کالا)

H_2 حداکثر مقدار موجودی بعد از اتمام فرآیند تولید زمانی که خرابی ماشین رخ داده باشد (واحد کالا).

توابع هدف

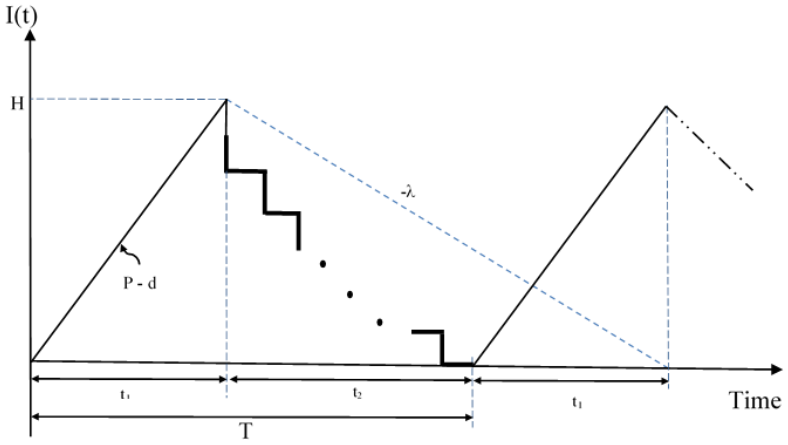
$TC_1(t)$: کل هزینه‌های موجودی هر چرخه با تولید اقلام معیوب، زمانی که خرابی ماشین رخ می‌دهد (واحد هزینه/واحد سیکل)

$TC_2(t)$: کل هزینه‌های موجودی هر سیکل با تولید اقلام معیوب، زمانی که خرابی ماشین رخ نمی‌دهد (واحد هزینه/واحد سیکل)

$TCU_1(t)$: کل هزینه‌های موجودی در هر واحد زمان با تولید اقلام معیوب در صورت رخدادن یا رخ‌ندادن خرابی (واحد هزینه/واحد زمان)

$TCU_2(t)$: کل هزینه‌های موجودی در هر واحد زمان بدون تولید اقلام معیوب در صورت رخدادن یا رخ‌ندادن خرابی (واحد هزینه/ واحد زمان)

مدل EPQ با فرض تولید اقلام معیوب تحت سیاست ارسال چندگانه



شکل ۱. نمودار سطح موجودی EPQ با ارسال چندگانه همراه با تولید اقلام معیوب

نمودار سطح موجودی مدل EPQ، در شرایط وجود اقلام معیوب در سیستم و سیاست ارسال چندگانه در شکل ۱، ارائه شده است. در این شکل، مدت‌زمان یک چرخه (T) به دو بازه تولید و مصرف تقسیم می‌شود. تولید کالا در مدت‌زمان t_1 انجام شده و در پایان چرخه اصلی تولید، فرض می‌شود که مقدار θ درصد از اقلام تولیدشده معیوب است و دور ریخته می‌شود. تولید کالا با نرخ P صورت می‌گیرد و اقلام معیوب با نرخ d تولید می‌شوند؛ درنتیجه نرخ تولید کالای سالم در سیستم برابر با $P - D$ خواهد بود؛ سپس فرایند تحویل کالا تحت سیاست ارسال چندگانه در مدت‌زمان t_2 و در n بار ارسال انجام می‌پذیرد. نرخ تقاضا ثابت و برابر λ فرض شده و از اقلام تولیدشده در یک چرخه برای رفع تقاضا در مدت‌زمان مصرف، t_2، همان چرخه و تقاضا در مدت‌زمان مصرف، t_1، چرخه بعدی استفاده می‌شود. در این مسئله، هدف فرموله‌سازی سیستم بر حسب متغیر t_1 است.

ازآنجاکه تابع هدف این مدل، حداقل‌کردن مجموع هزینه‌ها است، باید ابتدا اجزای هزینه سیستم استخراج شوند.

با توجه به شکل ۱، مدت‌زمان یک چرخه برابر با مجموع مدت‌زمان تولید و مدت‌زمان مصرف کالا است:

رابطه (۱) $$T = t_1 + t_2$$

اقلام معیوب با نرخ d تولید می‌شوند و θ درصد از کل اقلام تولیدی را شامل می‌شود:

رابطه (۲) $$dt_1 = \theta P t_1 = \theta Q$$

مقدار حداکثر سطح موجودی برابر است با:

$$P - d = \frac{H}{t_1} \Rightarrow H = t_1(P-d) = t_1(P-\theta P) = (1-\theta)Pt_1$$ رابطه (۳)

با توجه به شکل ۲، مدت‌زمان چرخه T به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda = \frac{H}{T} \Rightarrow T = \frac{H}{\lambda}$$ رابطه (۴)

با توجه به روابط ۳ و ۴، مدت‌زمان تحویل کالا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$t_2 = T - t_1 \Rightarrow t_2 = H(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{(1-\theta)P})$$ رابطه (۵)

هزینه راه‌اندازی یک چرخه اصلی تولید که تنها یکبار و در ابتدای هر چرخه اصلی اعمال می‌شود برابر است با:

K رابطه (۶)

مقدار هزینه تولید که از ضرب تعداد کالای تولیدشده در هزینه تولید هر کالا محاسبه می‌شود، برابر است با:

$$CQ = C \cdot t_1 \cdot P$$ رابطه (۷)

مجموع هزینه‌ی ارسال کالاها از طریق ضرب تعداد بارهای ارسال کالا در هزینه هر بار ارسال برابر خواهد بود با:

nK_1 رابطه (۸)

هزینه دفع کالاهای معیوب برابر است با:

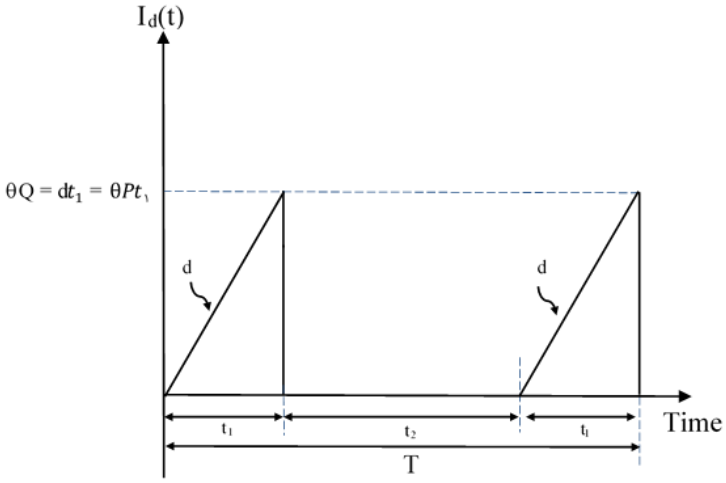
$$C_s\,\theta\,Q = C_s \cdot \theta \cdot t_1 \cdot P$$ رابطه (۹)

هزینه نگهداری کالای سالم در مدت‌زمان تولید برابر است با:

$$h\left[\frac{H}{2}(t_1)\right]$$ رابطه (۱۰)

هزینه نگهداری کالای معیوب با توجه به شکل ۲، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h\left[\frac{\theta Q}{2}(t_1)\right] = h\left[\frac{\theta P t_1}{2}(t_1)\right] = h\left[\frac{\theta P t_1^2}{2}\right] \quad (۱۱)$$



شکل ۲. نمودار سطح موجودی کالای معیوب

هزینه نگهداری کالا در مدت‌زمان ارسال به‌صورت زیر است:

رابطه (۱۲)
$$h\left[\left(\frac{n-1}{2n}\right)Ht_2\right]$$

هدف سیستم، حداقل‌کردن مجموع هزینه‌های سیستم موجودی است. تابع هزینه کل در هر چرخه، متشکل از مجموع هزینه‌ها به‌صورت زیر است:

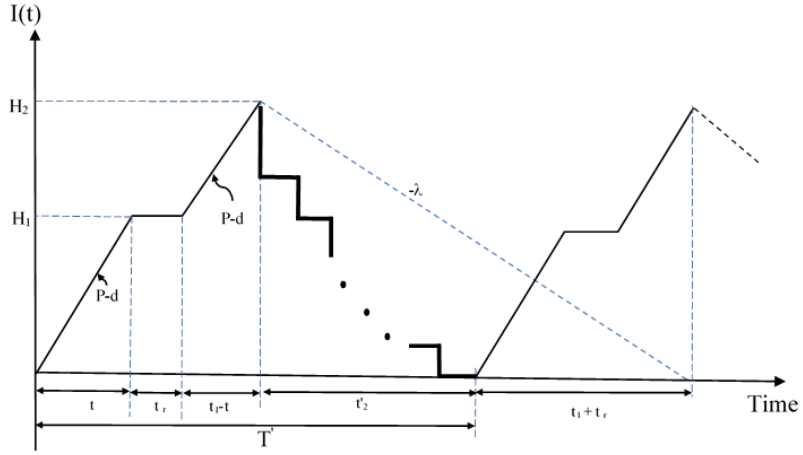
رابطه (۱۳)
$$TC_1(t_1) = C \cdot t_1 \cdot P + C_s \cdot \theta \cdot t_1 \cdot P + K + nK_1 + h\left\{\frac{H}{2}(t_1) + \frac{\theta P}{2}(t_1^2) + \left(\frac{n-1}{2n}\right)Ht_2\right\}$$

با استفاده از روابط ۲، ۳ و ۴ و ساده‌سازی رابطه ۱۳، مجموع هزینه هر چرخه برابر است با:

رابطه (۱۴)
$$TC_1(t_1) = K + nK_1 + (C + C_s\theta)P \cdot t_1 + \left\{\frac{h((1-\theta)P)^2}{2\lambda} - \frac{h((1-\theta)P)^2}{2n\lambda} + \frac{h(1-\theta)P}{2n} + \frac{h\theta P}{2}\right\} \cdot t_1^2$$

همان‌طور که در قسمت مفروضات اشاره شد، فرض $P - d \geq \lambda$ باید در این مدل برقرار باشد.

مدل EPQ با فرض تولید اقلام معیوب تحت سیاست ارسال چندگانه و یک بار خرابی ماشین در بازه‌ی تولید. نمودار سطح موجودی سیستم در شرایط وقوع یک بار خرابی ماشین در بازه زمانی تولید، در شکل ۳، نشان داده شده است. تابع هدف این سیستم، حداقل‌کردن مجموع هزینه‌ها است و اجزای هزینه‌ای مدل قبل با این مدل مشترک است. تفاوت اصلی در این است که در این سیستم، ماشین یک بار دچار خرابی می‌شود و نیاز به تعمیر پیدا می‌کند.



شکل ۳. نمودار سطح موجودی مدل EPQ با ارسال چندگانه همراه با تولید اقلام معیوب با یک دفعه خرابی ماشین در بازه تولید

با توجه به شکل ۳، مدت‌زمان یک چرخه برابر است با:

$$T' = t + t_r + (t_1 - t) + t'_2$$ رابطه (۱۵)

سطح موجودی در زمان خرابی نیز برابر است با:

$$(P-d) = \frac{H_1}{t} \quad \Rightarrow \quad H_1 = (P-d)t = (1-\theta)Pt$$ رابطه (۱۶)

با توجه به نمودار ۳، مدت‌زمان یک چرخه برابر است با:

$$T' = \frac{H_2}{\lambda}$$ رابطه (۱۷)

مقدار g مدت‌زمان تعمیر ماشین است:

$$t_r = g$$ رابطه (۱۸)

در این شرایط حداکثر سطح موجودی برابر است با:

$$P - d = \frac{H_2}{t_1} \quad \Rightarrow \quad H_2 = (P - d)t_1 = (1 - \theta)Pt_1$$ رابطه (۱۹)

علاوه بر هزینه‌های ذکرشده در بخش قبل، سایر هزینه‌های این مدل عبارت‌اند از:
هزینه تعمیر خرابی ماشین:

M رابطه (۲۰)

هزینه نگهداری کالا قبل از خرابی ماشین:

$$h\left[\frac{H_1}{2}(t)\right]$$ رابطه (۱۱)

هزینه نگهداری کالا در مدت‌زمان تعمیر ماشین:

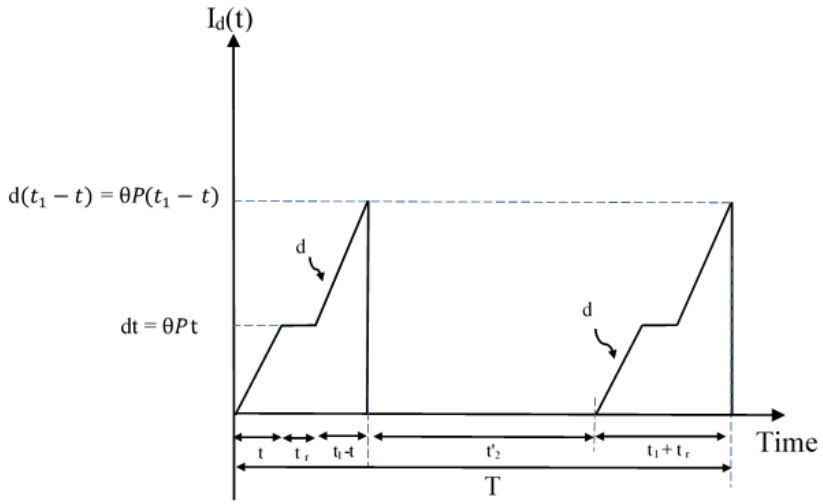
$h[H_1(t_r)]$ رابطه (۲۲)

هزینه نگهداری کالا بعد از تعمیر ماشین در بازه تولید:

$$h\left[\frac{H_1 + H_2}{2}(t_1 - t)\right]$$ رابطه (۲۳)

هزینه نگهداری کالای معیوب در مدت‌زمان تولید هزینه نگهداری کالای معیوب که با توجه به شکل ۴، برابر است با:

$$h\left[\frac{\theta Pt}{2}(t) + \theta Pt(t_r) + \frac{\theta Pt + \theta P(t_1 - t)}{2}(t_1 - t)\right]$$ رابطه (۲۴)



شکل ۴. نمودار سطح موجودی کالای معیوب با یک دفعه خرابی احتمالی

هزینه نگهداری کالا در مدت‌زمان تحویل:

$$h\left[\left(\frac{n-1}{2n}\right)H_2 t_2\right]$$ رابطه (۲۵)

هدف سیستم، حداقل‌کردن مجموع هزینه‌های سیستم موجودی است. تابع هزینه کل در هر چرخه متشکل از مجموع هزینه‌ها به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} TC_2(t_1) = {} & C \cdot t_1 \cdot P + C_s \cdot \theta \cdot t_1 \cdot P + K + M + nK_1 \\ & + h\left(\frac{n-1}{2n}\right)H_2 t_2 \\ & + h\left\{\frac{H_1}{2}(t) + H_1(t_r) + \frac{H_1 + H_2}{2}(t_1 - t)\right\} \\ & + h\left\{\frac{\theta P t}{2}(t) + \theta P t(t_r) \right. \\ & \left. + \frac{\theta P t + \theta P(t_1 - t)}{2}(t_1 - t)\right\} \end{aligned}$$ رابطه (۲۶)

پس از ساده‌سازی با استفاده از روابط نموداری، مجموع هزینه هر چرخه برابر است با:

$$TC_2(t_1) = K + M + nK_1 + (C + C_s\theta)P \cdot t_1 + hgP(1-\theta^2)\cdot t + h\theta Pgt + \frac{h\theta P}{2}t^2 + \left\{\frac{h\left((1-\theta)P\right)^2}{2\,\lambda} - \frac{h\left((1-\theta)P\right)^2}{2n\lambda} + \frac{h(1-\theta)P}{2n} + \frac{h\theta P}{2}\right\}\cdot t_1^2 + \left\{\frac{h(1-\theta)Pg}{2\,n}(1-n)\right\}\cdot t_1$$

رابطه (۲۷)

تابع هزینه‌ی کل. در دو بخش قبل مدل EPQ با ارسال چندگانه با اقلام معیوب، یک بار بدون خرابی احتمالی و یک بار با خرابی و تعمیر ماشین بررسی شد. برای محاسبه مجموع هزینه در افق زمانی، تابع هزینه کل محاسبه‌شده باید بر زمان هر چرخه تقسیم شود. این مقدار برابر است با:

$$\mathrm{TCU}_1(t_1) = \frac{\{\int_0^{t_1}[TC_1(t_1)]f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{\infty}[TC_2(t_1)]f(t)\,\mathrm{d}t\}}{T}$$

رابطه (۲۸)

مدت‌زمان یک چرخه برابر است با:

$$T = \frac{Q}{\lambda} = \frac{Pt_1}{\lambda}$$

رابطه (۲۹)

با فرض اینکه تعداد خرابی ماشین در هر چرخه از یک توزیع پواسون با پارامتر β پیروی کند، می‌توان نتیجه گرفت که مدت‌زمان بین هر دو خرابی، یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر β است که در آن تابع چگالی احتمال به‌صورت زیر است:

$$f(t) = \beta e^{-\beta t}$$

(۳۰)

پس از جایگذاری مقادیر، تابع هزینه کل برابر است با:

$$\mathrm{TCU}_1(t_1) = \frac{\left\{\begin{array}{l}\int_0^{t_1}\left\{\begin{array}{c}K + nK_1 + (C + C_s\theta)P\cdot t_1 \\ +\{\frac{h((1-\theta)P)^2}{2\,\lambda} - \frac{h((1-\theta)P)^2}{2n\lambda} + \frac{h(1-\theta)P}{2n} + \frac{h\theta P}{2}\}\cdot t_1^2\end{array}\right\}f(t)dt \\ +\int_{t_1}^{\infty}\left\{\begin{array}{c}K + M + nK_1 + (C + C_s\theta)P\cdot t_1 + hgP(1-\theta^2)\cdot t + h\theta Pgt + \frac{h\theta P}{2}t^2 \\ +\left\{\frac{h\left((1-\theta)P\right)^2}{2\,\lambda} - \frac{h\left((1-\theta)P\right)^2}{2n\lambda} + \frac{h(1-\theta)P}{2n} + \frac{h\theta P}{2}\right\}\cdot t_1^2 + \left\{\frac{h(1-\theta)Pg}{2\,n}(1-n)\right\}\cdot t_1\end{array}\right\}f(t)dt\end{array}\right\}}{\frac{Pt_1}{\lambda}}$$

رابطه (۳۱)

پس از ساده‌سازی و حل انتگرال‌ها، تابع هزینه حاصل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{TCU}_1(t_1) = \frac{\sigma_1}{2n} - \frac{e^{-\beta t_1}\sigma_1}{2n} + \frac{\lambda\left(\frac{e^{-\beta t_1}W}{2\lambda n} + \frac{Phe^{-\beta t_1}(\theta+\beta g+\beta g\theta+\beta t_1\theta-\beta g\theta^2}{\beta^2}\right)}{pt_1} + \frac{P^2ht_1^2(n-1)(\theta-1)^2}{2\lambda n} - \frac{P^2ht_1^2e^{-\beta t_1}(n-1)(\theta-1)^2}{2\lambda n}$$

رابطه (۳۲)

در رابطه ۳۲، مقادیر σ_1 و W برابر خواهند بود با:

$$\sigma_1 = 2Kn + 2K_1n^2 + Pht_1^2 - Pht_1^2\theta + 2CPnt_1 + 2CsPnt_1\theta + Phnt_1^2\theta$$

رابطه (۳۳)

$$W = 2K\lambda n - P^2ht_1^2 + 2M\lambda n + 2K_1\lambda n^2 - P^2ht_1^2\theta^2 + Ph\lambda t_1^2 + P^2hnt_1^2 + 2P^2ht_1^2\theta - 2P^2hnt_1^2\theta + 2CP\lambda nt_1 + Pgh\lambda t_1 + P^2hnt_1^2\theta^2 - Ph\lambda t_1^2\theta + 2Ph\lambda nt_1^2\theta + 2CsP\lambda nt_1\theta - Pgh\lambda t_1\theta + 3Pgh\lambda nt_1\theta - 2Pgh\lambda nt_1\theta^2$$

رابطه (۳۴)

با توجه به بخش مفروضات، در این مدل باید رابطه $(P-d)-(P-d)(\frac{t_r}{t_1+t_r}) \geq \lambda$ برقرار باشد.

حل مدل. برای به‌دست‌آوردن مدت‌زمان بهینه تولید t_1^*، ابتدا از تابع هزینه کل مشتق گرفته می‌شود:

$$\frac{d\mathrm{TCU}_1}{dt_1} = -\frac{e^{-\beta t_1}L}{2P\beta^2\lambda nt_1^2}$$

رابطه (۳۵)

در معادله بالا L به‌صورت زیر فرض شده است:

$$
\begin{aligned}
L = {} & 2K_1\beta^2\lambda^2 n^2 - 2P^3\beta^2 h t_1^3 + P^3\beta^3 h t_1^4 + 2K\beta^2\lambda^2 n + 2M\beta^2\lambda^2 n \\
& + 2K\beta^3\lambda^2 n t_1 + 2M\beta^3\lambda^2 n t_1 - P\beta^2 h\lambda^2 t_1^2 \\
& + P^2\beta^2 h\lambda t_1^2 + 2P^2\beta^2 h\lambda t_1^3 + P\beta^3 h\lambda^2 t_1^3 \\
& - P^2\beta^3 h\lambda t_1^3 - P^2\beta^3 h\lambda t_1^4 + 2K_1\beta^3\lambda^2 n^2 t_1 \\
& + 2P^3\beta^2 h n t_1^3 - p^3\beta^3 h n t_1^4 + 4P^3\beta^2 h t_1^3\theta \\
& - 2P^3\beta^3 h t_1^4\theta + 2P^3\beta^2 h t_1^3 e^{\beta t_1} + 2Ph\lambda^2 n\theta \\
& - 2P^3\beta^2 h t_1^3\theta^2 + P^3\beta^3 h t_1^4\theta^2 \\
& - 2P^2\beta^2 h\lambda t_1^3 e^{-\beta t_1} - 2P^3\beta^2 h n t_1^3 e^{-\beta t_1} \\
& + 2P\beta g h\lambda^2 n - 4P^3\beta^2 h t_1^3\theta e^{-\beta t_1} \\
& + P^2\beta^2 h\lambda t_1^2\theta^2 - p^2\beta^3 h\lambda t_1^3\theta^2 + 2P^3\beta^2 h n t_1^3\theta^2 \\
& - P^3\beta^3 h n t_1^4\theta^2 - 2KP\beta^3\lambda n t_1^2 \\
& + 2P^3\beta^2 h t_1^3\theta^2 e^{-\beta t_1} + 2CP^2\beta^2\lambda n t_1^2 \\
& + 2CP\beta^3\lambda^2 n t_1^2 - 2CP^2\beta^3\lambda n t_1^3 - 2K_1 P\beta^3\lambda n^2 t_1^2 \\
& + P\beta^3 g h\lambda^2 t_1^2 - P^2\beta^2 h\lambda n t_1^2 + P^2\beta^3 h\lambda n t_1^3 \\
& + P\beta^2 h\lambda^2 t_1^2\theta - 2P^2\beta^2 h\lambda t_1^2\theta - 2P^2\beta^2 h\lambda t_1^3\theta \\
& - P\beta^3 h\lambda^2 t_1^3\theta + 2P^2\beta^3 h\lambda t_1^3\theta + P^2\beta^3 h\lambda t_1^4\theta \\
& - 6P^3\beta^2 h n t_1^3\theta + 3P^3\beta^3 h n t_1^4\theta - 4CP^2\beta^2\lambda n t_1^2\theta \\
& - 2CP\beta^3\lambda^2 n t_1^2\theta + 4CP^2\beta^3\lambda n t_1^3\theta \\
& + 2Cs\ P^2\beta^2\lambda n t_1^2\theta + 2Cs\ P\beta^3\lambda^2 n t_1^2\theta \\
& - 2Cs\ P^2\beta^3\lambda n t_1^3\theta + 2K_1 P\beta^3\lambda n^2 t_1^2\theta \\
& + P\beta^3 g h\lambda^2 n t_1^2 - P\beta^3 g h\lambda^2 t_1^2\theta \\
& + 2P^2\beta^2 h\lambda n t_1^2\theta + 2P^2\beta^2 h\lambda n t_1^3\theta \\
& + 2P\beta^3 h\lambda^2 n t_1^3\theta - 2P^2\beta^3 h\lambda n t_1^3\theta \\
& - P^2\beta^3 h\lambda n t_1^4\theta - 2CP^2\beta^2\lambda n t_1^2 e^{-\beta t_1} \\
& + 2P^2\beta^2 h\lambda t_1^3\theta e^{-\beta t_1} + 4P^3\beta^2 h n t_1^3\theta e^{-\beta t_1} \\
& + 2P\beta g h\lambda^2 n\theta + 2P\beta h\lambda^2 n t_1\theta - P^2\beta^2 h\lambda n t_1^2\theta^2 \\
& + P^2\beta^3 h\lambda n t_1^3\theta^2 - 2P^3\beta^2 h n t_1^3\theta^2 e^{-\beta t_1} \\
& + 2P\beta^2 g h\lambda^2 n t_1 - 2P\beta g h\lambda^2 n\theta^2 \\
& - 2P\beta^3 g h\lambda^2 n t_1^2\theta^2 + 2P\beta^2 g h\lambda^2 n t_1\theta \\
& - 2P\beta^2 g h\lambda^2 n t_1\theta^2 + 3\,P\beta^3 g h\lambda^2 n t_1^2\theta \\
& - 2\ Cs\ P^2\beta^2\lambda n t_1^2\theta e^{-\beta t_1} - 2P^2\beta^2 h\lambda n t_1^3\theta e^{-\beta t_1}
\end{aligned}
$$

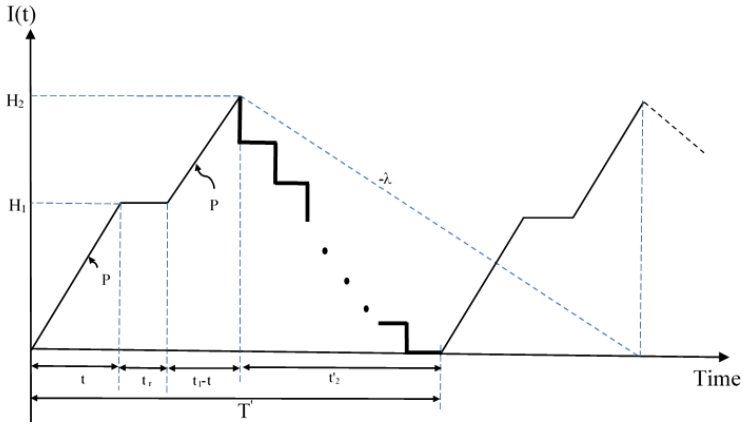
رابطه (۳۶)

با توجه به اینکه حاصل مشتق اول تابع هدف، یک معادله درجه ۴ همراه با پارامترهای توزیع نمایی است، استخراج مستقیم مقدار بهینه‌متغیر مدت‌زمان تولید ممکن نیست. به همین دلیل برای یافتن ریشه معادله از روش عددی دوبخشی استفاده خواهد شد؛ همچنین واسط گرافیکی کاربر[1] (GUI) نرم‌افزار متلب برای الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید نیز در جهت یافتن مقدار بهینه متغیر تصمیم و بررسی کارایی روش دوبخشی مورداستفاده قرار خواهند گرفت.

روش دوبخشی. هدف استفاده از این روش، یافتن ریشه معادله مشتق اول تابع هدف است. در این روش ابتدا دو نقطه که مقدار تابع در آن‌ها دارای علامت متفاوت است، انتخاب شده و پس از آن، مقدار تابع در میانه بازه داده‌شده محاسبه می‌شود. در گام بعد، از بین دو بازه ایجادشده، بازه‌ای انتخاب می‌شود که مقدار تابع در ابتدا و انتهای آن بازه هم‌علامت نباشند. برای بازه جدید الگوریتم مجدداً تکرار خواهد شد و در این شرایط، روش حل به ریشه معادله نزدیک‌تر می‌شود. اجرای الگوریتم تا زمان یافتن یک جواب مناسب برای معادله ادامه می‌یابد. پیوستگی تابع و صفرنبودن مشتق از شرایط استفاده از این روش است که برای مدل توسعه‌داده‌شده این شرایط صادق است.

مدل EPQ با فرض عدم‌تولید اقلام معیوب تحت سیاست ارسال چندگانه و یک بار خرابی ماشین در بازه تولید. نمودار سطح موجودی مدل مقدار اقتصادی تولید با درنظرگرفتن سیاست ارسال چندگانه و خرابی ماشین، در شرایطی که تولید اقلام معیوب در سیستم وجود ندارد، در شکل ۵، نشان داده شده است. با درنظرگرفتن مقدار $\theta = 0$ در مدل قبلی می‌توان مقدار بهینه چرخه تولید در این مدل را نیز محاسبه کرد.

1. Graphical user interfaces



شکل ۵. نمودار سطح موجودی EPQ با ارسال چندگانه همراه خرابی ماشین در بازه تولید (بدون اقلام معیوب)

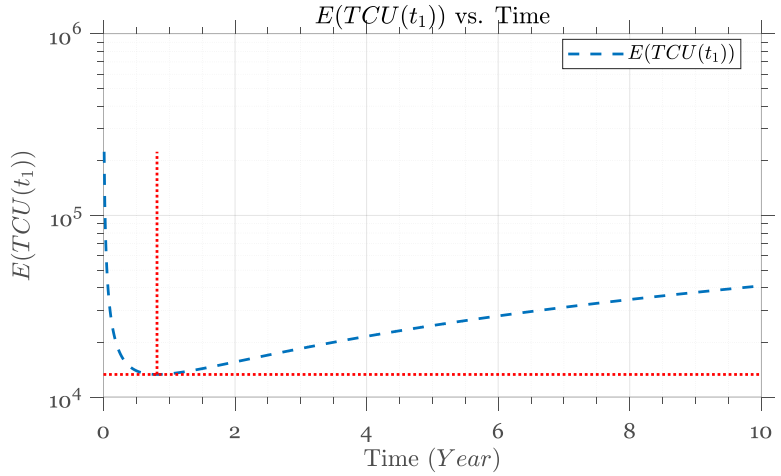
۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

مثال عددی. فرض کنید کالایی با نرخ $P = 10000$ واحد در سال تولید می‌شود و نیز نرخ تقاضای سالیانه آن $\lambda = 4000$ واحد است؛ همچنین متوسط تعداد خرابی ماشین در سال $\beta = 0.5$ فرض شده است و عملیات تعمیر ماشین $g = 0.018$ واحد زمان در سال به طول می‌انجامد. در هر چرخه اصلی تولید، مقدار $\theta = 0.1$ از کالای تولیدشده به‌عنوان ضایعات شناخته شود و سایر پارامترها به شرح جدول ۲، باشد:

جدول ۲. داده‌های ورودی مثال عددی

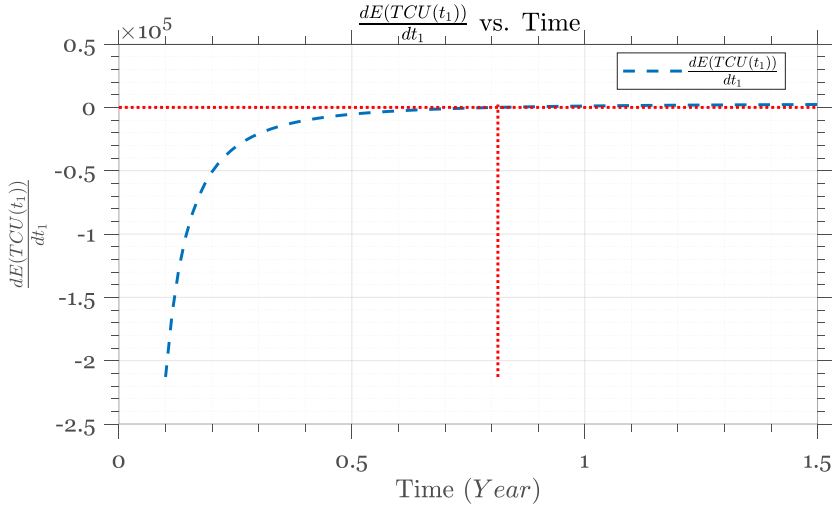
پارامتر	C	K	K_1	n	M	C_s	h
مقدار	۲	۴۵۰	۱۰۰	۴	۵۰۰	۰/۳	۰/۸

هدف از حل مدل حداقل‌کردن تابع هزینه کل و محاسبه مدت‌زمان بهینه تولید است. برای این منظور، حل مدل با استفاده از روش دوبخشی صورت گرفت. این الگوریتم در محیط برنامه‌نویسی MATLAB R2017a بر روی یک رایانه شخصی ۶۴ بیتی با پردازشگر Intel Core i7 و حافظه ۸ گیگابایت و CPU با توان ۲/۶ گیگاهرتز کُد شد. پس از حل مدل اول توسط این الگوریتم، مقدار بهینه مدت‌زمان تولید $t_1^* = 0.8135$ و با جایگزینی این مقدار در تابع هدف، مقدار حداقل تابع هزینه $TCU_1(t_1^*) = 13312.77$ محاسبه شد. نمودار رفتار تابع هدف مدل اول، نسبت به تغییرات متغیر مدت‌زمان تولید در شکل ۶، نشان داده شده است.



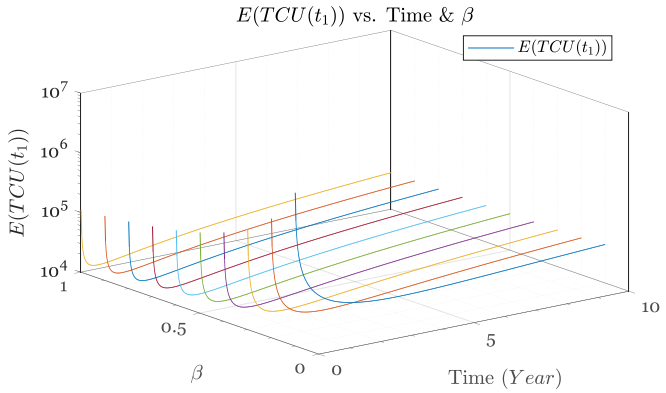
شکل ۶. رفتار تابع هدف مدل اول نسبت به متغیر مدت‌زمان تولید

با توجه به شکل ۶، شکل تابع هدف محدب است و نقطه بهینه محاسبه‌شده توسط الگوریتم دوبخشی در نقطه‌ی تحدب تابع قرار گرفته است. از سوی دیگر، روش دوبخشی به دنبال محاسبه ریشه مشتق اول تابع هزینه کل برای یافتن مقدار بهینه متغیر زمان تولید است. رفتار معادله مشتق اول مدل اول نسبت به متغیر زمان تولید در شکل ۷، نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، مقدار بهینه زمان تولید، نقطه‌ای است که مقدار رابطه مشتق اول برابر با صفر خواهد بود.



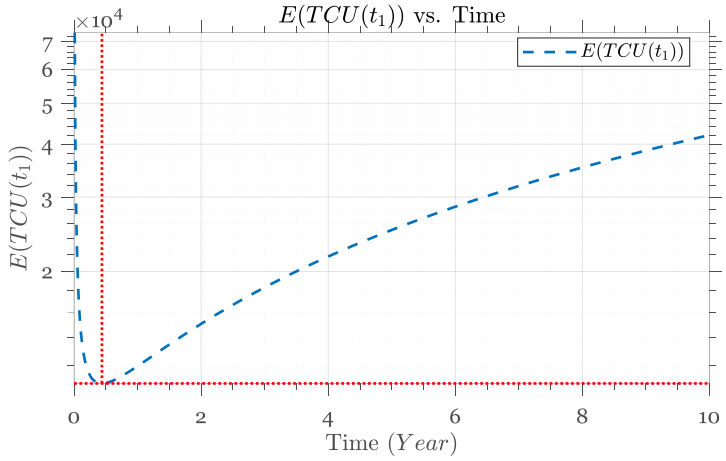
شکل ۷. رفتار مشتق اول تابع هدف مدل اول نسبت به متغیر مدت‌زمان تولید

به‌منظور تحلیل حساسیت مدل اول نسبت به پارامتر متوسط تعداد خرابی ماشین، این پارامتر تغییر داده شد و خروجی‌ها مرتبط در شکل ۸، نشان داده شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۸، مشخص است، با افزایش متوسط تعداد خرابی‌های ماشین، هزینه بیشتری به سیستم تحمیل می‌شود و مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد؛ به‌علاوه مقدار متغیر تصمیم مسئله نیز رابطه مستقیمی با این پارامتر دارد. افزایش متوسط تعداد خرابی‌های ماشین باعث افزایش مدت‌زمان بهینه‌ی تولید خواهد شد.



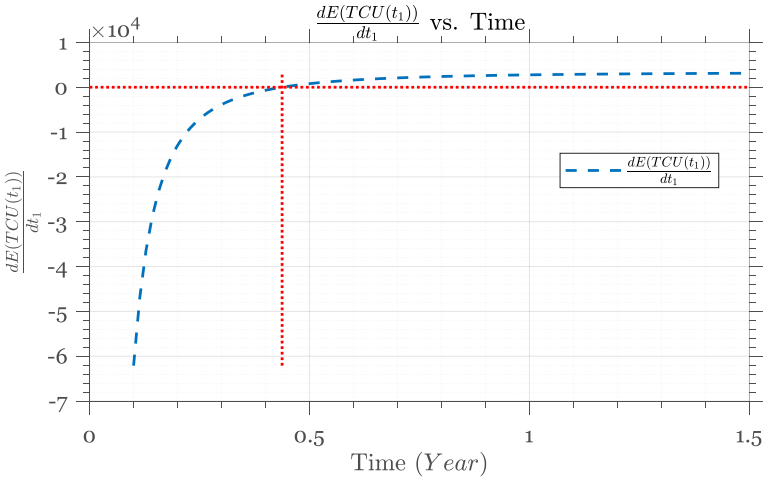
شکل ۸. رفتار تابع هدف و متغیر تصمیم مدل اول نسبت به پارامتر متوسط تعداد خرابی ماشین

مثال عددی قبل برای مدل دوم در حالتی که درصد اقلام معیوب سیستم برابر با صفر باشد ($\theta = 0$) نیز حل شد. پس از حل مدل توسط روش دوبخشی، مقدار $t_1{}^* = 0.4377$ به‌عنوان مدل زمان بهینه تولید و مقدار $TCU_2(t_1{}^*) = 13312.77$ به‌عنوان مقدار بهینه تابع هدف مسئله محاسبه شدند. رفتار محدب تابع هدف مدل دوم نسبت به متغیر مدل زمان تولید در شکل ۹، نشان داده شده است.



شکل ۹. رفتار تابع هزینه کل در حالت بدون تولید اقلام معیوب نسبت به مدت‌زمان تولید

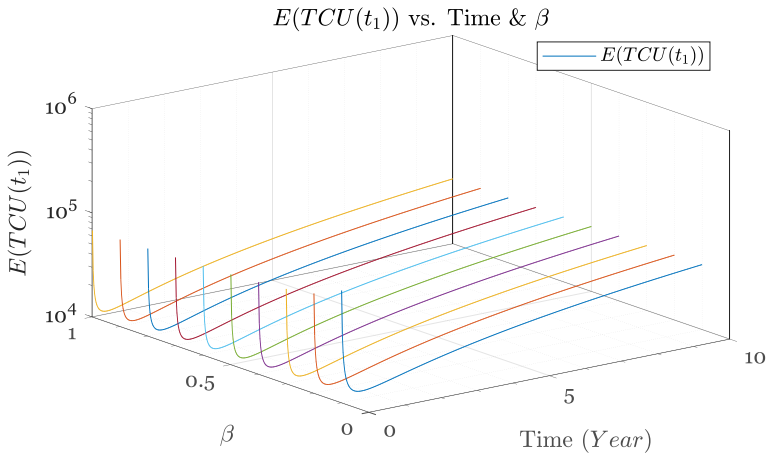
رفتار معادله مشتق اول تابع هدف مدل دوم نیز در شکل ۱۰، نشان داده شده است. مشابه با مدل قبل، مقدار بهینه متغیر مدت‌زمان تولید در نقطه‌ای قرار دارد که معادله مشتق اول تابع هدف برابر با صفر باشد.



شکل ۱۰. رفتار مشتق تابع هزینه کل در حالت بدون تولید اقلام معیوب نسبت به مدت‌زمان تولید

حساسیت مدل دوم نسبت به پارامتر متوسط تعداد خرابی ماشین نیز بررسی شد. تحلیل حساسیت این پارامتر برای مدل دوم در شکل ۱۱، نشان داده شده است. مطابق با این شکل، رفتار تابع هدف و متغیر تصمیم مدل دوم با مدل اول مشابه است. افزایش متوسط تعداد

خرابی‌های ماشین، افزایش مدت‌زمان تولید و درنتیجه افزایش مقدار هزینه‌ی سیستم را در پی خواهد داشت.

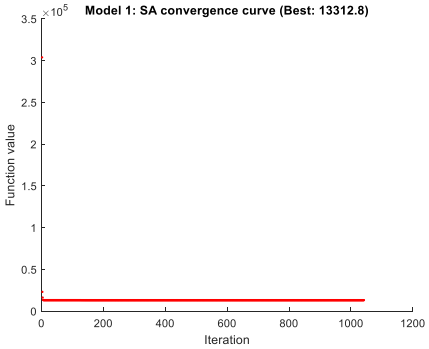


شکل ۱۱. رفتار تابع هدف و متغیر تصمیم مدل دوم نسبت به پارامتر متوسط تعداد خرابی ماشین

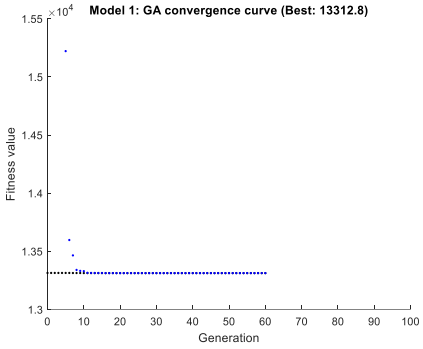
ارزیابی جواب. به‌منظور بررسی کیفیت روش دوبخشی پیشنهادی برای حل مسئله، مثال عددی با استفاده از واسط گرافیکی کاربر نرم‌افزار متلب برای الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید نیز حل شد. مقدار بهینه خروجی تابع هدف به‌عنوان معیار مقایسه و ارزیابی روش‌ها در نظر گرفته شده است؛ همچنین از تنظیمات پیش‌فرض Options در نرم‌افزار متلب برای تنظیم ورودی‌های الگوریتم‌ها استفاده شد. جدول ۳، نتیجه حل مثال عددی با استفاده از الگوریتم‌های ژنتیک، شبیه‌سازی تبرید و روش دوبخشی را نشان می‌دهد؛ همچنین نمودار همگرایی این دو الگوریتم برای دو مدل موردنظر در شکل‌های ۱۲ تا ۱۵، نشان داده شده است. مقایسه مقدار بهینه تابع هدف محاسبه‌شده توسط الگوریتم‌های ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید با مقدار بهینه‌ی محاسبه‌شده تابع هدف در روش دوبخشی، کارایی روش دوبخشی در یافتن مقدار بهینه تقریبی مسئله را نشان می‌دهد. هر سه الگوریتم به یک مقدار همگرا شده‌اند.

جدول ۳. مقایسه عملکرد الگوریتم‌های پیشنهادی در حل مدل‌ها

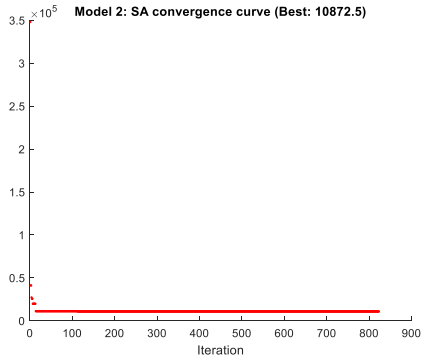
	مدل اول		مدل دوم	
روش حل	t_1^*	TCU_1^*	t_1^*	TCU_2^*
الگوریتم دوبخشی	۰/۸۱۳۵	۱۳۳۱۲/۷۷	۰/۴۳۷۷	۱۰۸۷۲/۴۷
الگوریتم ژنتیک	۰/۸۱۳۵	۱۳۳۱۲/۷۷	۰/۴۳۷۷	۱۰۸۷۲/۴۷
الگوریتم شبیه‌سازی تبرید	۰/۸۱۳۵	۱۳۳۱۲/۷۷	۰/۴۳۷۷	۱۰۸۷۲/۴۷



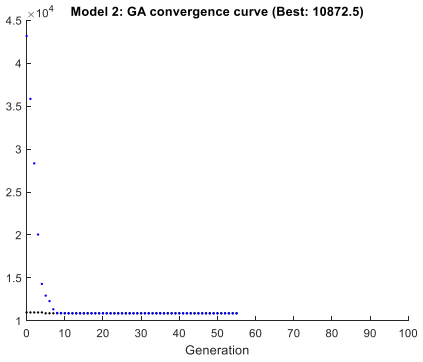
شکل ۱۲. نمودار همگرایی الگوریتم شبیه‌سازی تبرید برای مدل اول



شکل ۱۳. نمودار همگرایی الگوریتم ژنتیک برای مدل اول



شکل ۱۴. نمودار همگرایی الگوریتم شبیه‌سازی تبرید برای مدل دوم



شکل ۱۵. نمودار همگرایی الگوریتم ژنتیک برای مدل دوم

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در یک سیستم موجودی با وجود خرابی ماشین، سیاست ارسال چندگانه و تولید کالای معیوب، برنامه‌ریزی سیستم موجودی و تعیین مقدار بهینه متغیر مدت‌زمان تولید از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. بی‌توجهی به برنامه‌ریزی مناسب سیستم باعث ایجاد مشکلات مختلفی از قبیل رخدادن کمبود، افزایش هزینه‌های تعمیر، افزایش هزینه نگهداری و غیره خواهد شد. در پژوهش حاضر، توسعه یک مدل مقدار اقتصادی تولید با وجود اقلام معیوب را در شرایط وجود سیاست ارسال چندگانه و خرابی احتمالی ماشین بررسی شد. فرض سیستم توسعه‌داده‌شده بر این بود که تعداد خرابی‌های ماشین در یک چرخه از توزیع پواسون پیروی می‌کند. دو مورد مختلف از این مدل تجزیه‌وتحلیل شدند. مورد اول، سیستم موجودی در شرایط وجود درصد ثابتی از اقلام معیوب را شامل می‌شد. مورد دوم، سیستم موجودی در شرایط نبود اقلام معیوب را بررسی می‌کرد. با توجه به پیچیدگی تابع هدف مسئله از یک روش عددی به نام «روش دوبخشی»

برای حل مسئله استفاده شد. با توجه به دشواری اثبات تحدب توابع هدف، به‌منظور ارزیابی کارایی روش دوبخشی، حل مدل با استفاده از واسط گرافیکی کاربر نرم‌افزار متلب برای الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی تبرید نیز انجام شد. مقایسه خروجی‌ها کارایی روش دوبخشی را نشان داد. هر سه الگوریتم به اختلاف بسیار اندکی به یک مقدار بهینه تقریبی برای هر دو مدل، همگرا شدند. برای پژوهش‌های آتی می‌توان وجود حالات مختلف کمبود در این سیستم را لحاظ کرد؛ همچنین درنظرگرفتن امکان دوباره‌کاری قطعات معیوب یا درنظرگرفتن تعداد دفعات ارسال به‌عنوان متغیر نیز از گزینه‌های جذاب برای توسعه این پژوهش هستند. درنهایت لحاظ‌کردن درصد اقلام معیوب سیستم در حالت عدم‌قطعیت و به‌صورت پارامترهای احتمالی یا فازی نیز می‌تواند یکی دیگر از پیشنهادها برای پژوهش‌های آتی باشد.

منابع

1. Asadkhani J, Mokhtari H, Tahmasebpoor S (2021) Optimal lot-sizing under learning effect in inspection errors with different types of imperfect quality items. *Oper Res*. https://doi.org/10.1007/s12351-021-00624-7
2. Cárdenas-Barrón, L. E. (2008). Optimal manufacturing batch size with rework in a single-stage production system–a simple derivation. *Computers & Industrial Engineering, 55(4),* 758-765.
3. Cárdenas-Barrón, L. E., Sarkar, B., & Treviño-Garza, G. (2013). An improved solution to the replenishment policy for the EMQ model with rework and multiple shipments. *Applied Mathematical Modelling, 37(7),* 5549-5554.
4. Cheng, T. (1991). An economic order quantity model with demand-dependent unit production cost and imperfect production processes. *IIE transactions, 23(1),* 23-28.
5. Chiu, S. W., Wang, S.-L., & Chiu, Y.-S. P. (2007). Determining the optimal run time for EPQ model with scrap, rework, and stochastic breakdowns. *European Journal of Operational Research,* 180(2), 664-676.
6. Chiu, S. W., Chen, K.-K., Chiu, Y.-S. P., & Ting, C.-K. (2012). Notes on the mathematical modeling approach used to determine the replenishment policy for the EMQ model with rework and multiple shipments. Applied Mathematics Letters, 25(11), 1964-1968.
7. Chiu, Y. P. (2003). Determining the optimal lot size for the finite production model with random defective rate, the rework process, and backlogging. Engineering optimization, 35(4), 427-437.
8. Chiu, Y.-S. P., Chen, K.-K., Cheng, F.-T., & Wu, M.-F. (2010). Optimization of the finite production rate model with scrap, rework and stochastic machine breakdown. *Computers & mathematics with applications, 59(2),* 919-932.
9. Chiu, Y.-S. P., Liu, S.-C., Chiu, C.-L., & Chang, H.-H. (2011). Mathematical modeling for determining the replenishment policy for EMQ model with rework and multiple shipments. *Mathematical and Computer Modelling, 54(9-10),* 2165-2174.
10. Fallahi, A., Azimi-Dastgerdi, M., Mokhtari, H. (2021). A Sustainable Production-Inventory Model Joint with Preventive Maintenance and Multiple Shipments for Imperfect Quality Items. *Scientia Iranica,* (), -. doi: 10.24200/sci.2021.55927.4475
11. Fallahi, A., Mokhtari, H., & Niaki, S. T. A. (2021). Designing a closed-loop blood supply chain network considering transportation flow and quality aspects. *Sustainable Operations and Computers, 2,* 170-189.
12. Harris, F. W. (1913). How many parts to make at once. Factory, T*he Magazine of Management, 10,* 135-136, 152.
13. Hasanpour, J., Hasani, A., & Ghodoosi, M. (2018). Delayed Payment Policy in the Inventory Model of Deteriorating Goods with Quadratic Demand in Order to Backlogging Shortage. *Journal of Industrial Management Perspective, 7(4),* 199-230. (In Persian)
14. Hayek, P. A., & Salameh, M. K. (2001). Production lot sizing with the reworking of imperfect quality items produced. *Production planning & control, 12(6),* 584-590.

15. Jamal, A., Sarker, B. R., & Mondal, S. (2004). Optimal manufacturing batch size with rework process at a single-stage production system. *Computers & Industrial Engineering, 47(1),* 77-89.
16. Kalantari, S. S., & Taleizadeh, A. A. (2020). Mathematical modelling for determining the replenishment policy for deteriorating items in an EPQ model with multiple shipments. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics, 7(2),* 164-171.
17. Kazemi, N., Abdul-Rashid, S. H., Ghazilla, R. A. R., Shekarian, E., & Zanoni, S. (2018). Economic order quantity models for items with imperfect quality and emission considerations. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics, 5(2),* 99-115.
18. Lai, X., Chen, Z., & Bidanda, B. (2019). Optimal decision of an economic production quantity model for imperfect manufacturing under hybrid maintenance policy with shortages and partial backlogging. *International Journal of Production Research, 57(19),* 6061-6085.
19. Mirzabaghi, M., & Jolai, F. (2017). Inventory Planning in a G/G/1/∞ Queuing System with Multiple Suppliers using Simulation and Response Surface Methodology. *Journal of Industrial Management Perspective, 7(3),* 9-26. (In Persian)
20. Mokhtari, H., & Asadkhani, J. (2021). Economic order quantity for imperfect quality items under inspection errors, batch replacement and Multiple sales of returned items. *Scientia Iranica, 28(5),* 2890-2909.
21. Mokhtari, H., & Asadkhani, J. (2020). Extended economic production quantity models with preventive maintenance. *Scientia Iranica, 27(6),* 3253-3264.
22. Mokhtari, H., Hasani, A., & Fallahi, A. (2021). Multi-Product Constrained Economic Production Quantity Models for Imperfect Quality Items with Rework. *International Journal of Industiral Engineering & Producion Research, 32(2),* 1-23.
23. Mokhtari, H., Salmasnia, A., & Asadkhani, J. (2020). A new production-inventory planning model for joint growing and deteriorating items. *International Journal of Supply and Operations Management, 7(1),* 1-16.
24. Motallebi, S., & Zandieh, M. (2017). Determination of Inventory Management Policies in Process Manufacturing: Using Discrete Event Simulation. *Journal of Industrial Management Perspective, 7(2),* 83-108. (In Persian)
25. Niaki, S., Taleizadeh, A., & Najafi, A. Economic Production Quantity Model with Scrapped Items and Limited Production Capacity. *Scientia Iranica, 17(1),* 58-69.
26. Nobil, A. H., Sedigh, A. H. A., & Cárdenas-Barrón, L. E. (2020). Reorder point for the EOQ inventory model with imperfect quality items. *Ain Shams Engineering Journal, 11(4),* 1339-1343.
27. Priyan, S., & Uthayakumar, R. (2017). Setup cost reduction EMQ inventory system with probabilistic defective and rework in multiple shipments management. *International Journal of System Assurance Engineering and Management, 8(2),* 223-241.
28. Rezaei, J. (2016). Economic order quantity and sampling inspection plans for imperfect items. *Computers & Industrial Engineering, 96,* 1-7.
29. Ritha, W., & Martin, N. (2013). Replenishment policy for EMQ model with rework, multiple shipments, switching and packaging. *Int. J. Eng. Res. Technol, 2(1),* 1-8.

30. Rosenblatt, M. J., & Lee, H. L. (1986). Economic production cycles with imperfect production processes. IIE transactions, 18(1), 48-55. 31. Ritha, W., & Martin, N. (2013). Replenishment policy for EMQ model with rework, multiple shipments, switching and packaging. *Int. J. Eng. Res. Technol, 2(1)*, 1-8.
31. Taleizadeh, A. A., Kalantari, S. S., & Cárdenas-Barrón, L. E. (2016). Pricing and lot sizing for an EPQ inventory model with rework and multiple shipments. *Top, 24(1)*, 143-155.
32. Taleizadeh, A. A., Samimi, H., Sarkar, B., & Mohammadi, B. (2017). Stochastic machine breakdown and discrete delivery in an imperfect inventory-production system. *Journal of Industrial & Management Optimization, 13(3)*, 1511.
33. Taft, E. (1918). The most economical production lot. *Iron Age, 101(18)*, 1410-1412.
34. Ting, C.-K., Chiu, Y.-S. P., & Chan, C.-C. H. (2011). Optimal lot sizing with scrap and random breakdown occurring in backorder replenishing period. *Mathematical and Computational Applications, 16(2)*, 329-339.
35. Tsao, Y.-C., Lee, P.-L., Liao, L.-W., Zhang, Q., Vu, T.-L., & Tsai, J. (2020). Imperfect economic production quantity models under predictive maintenance and reworking. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics, 7(4)*, 347-360.