



**Original Article**

## **Deriving the Efficiency Frontier for Two-Stage Structures: Input – Output Oriented Approach of Radial and Non- Radial**

Amir Ebrahimi\*, Reza Soleymani Damaneh\*\*,  
Abbas Shoul\*\*\*

### **Abstract**

Early models of data envelopment analysis are not suitable for evaluating two-stage structures due to the black box view and lack of attention to internal processes. In these structures, Deriving the efficiency frontier and fairly determining the optimal value of variables is the most important challenge. In many existing two-stage models, the efficiency frontier is not plotted or the optimal value of intermediate variables is determined by one of two steps. This leads to incorrect calculation of the efficiency of the next stage and the total efficiency. In fact, in these models, poor performance of one stage leads to reduced efficiency of the other stage. In this study, by keeping the intermediate variables constant at the current level and with an input-output oriented approach, radial and non-radial models were developed on a constant and variable returns to scale in terms of efficiency. Using mathematical relations, the validity of the models was proved and shown that in the proposed models, the performance of the units in steps is compared with a unit on the efficiency frontier, and the models make the whole structure efficient by bringing the steps to the efficiency frontier. The proposed models were used in an applied study to evaluate the sustainability of nine supply chains of tomato producers. Their performance results were expressed by four models as well as the optimal value of inefficient unit variables in each of these models.

**Keywords:** Efficiency; Fairness Evaluation; Two-Stage DEA; Supply Chain Sustainability, Non-Oriented Models.

**How to Cite:** Ebrahimi, Amir; Soleymani Damaneh, Reza; Shoul, Abbas (2023). Deriving the Efficiency Frontier for Two-Stage Structures: Input – Output Oriented Approach of Radial and Non-Radial, *Ind. Manag. Persp.*, 13(3), 195-222 (*In Persian*).

Received: June. 12, 2022; Revised: Apr. 19, 2023; Accepted: Aug. 13, 2023; Published Online: Aug. 22, 2023.

\* MA, Department of Management, Faculty of Administrative Sciences and Economics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.

\*\* Assistant Professor, Department of Management, Faculty of Administrative Sciences and Economics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.

Corresponding author. Email: [r.soleymani@vru.ac.ir](mailto:r.soleymani@vru.ac.ir)

\*\*\* Associate Professor, Department of Management, Faculty of Administrative Sciences and Economics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.





## ترسیم مرز کارایی در ساختارهای دومرحله‌ای: رویکرد ورودی - خروجی محور شعاعی و غیرشعاعی

امیر ابراهیمی\*، رضا سلیمانی دامنه\*\*، عباس شول\*\*\*

### چکیده

مدل‌های اولیه تحلیل پوششی داده‌ها به دلیل دیدگاه جعبه سیاه و بی‌توجهی به فرایندهای داخلی، برای ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای مناسب نیستند. در این ساختارها ترسیم مرز کارایی و تعیین عادلانه مقدار بهینه متغیرها مهم‌ترین چالش است. در بسیاری از مدل‌های دومرحله‌ای موجود مرز کارایی ترسیم نشده است و یا مقدار بهینه متغیرهای میانی توسط یکی از دو مرحله تعیین می‌شود. این امر به محاسبه اشتباه کارایی مرحله دیگر و کارایی کل منجر می‌شود. در واقع در این مدل‌ها ضعف عملکرد یک مرحله به کاهش کارایی مرحله دیگر منجر خواهد شد. در این پژوهش با ثابت‌نگه‌داشتن متغیرهای میانی در سطح فعلی و با یک رویکرد ورودی-خروجی محور، مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی در شرایط بازده به مقیاس ثابت و متغیر توسعه داده شده است؛ سپس با استفاده از قضایای ریاضی اعتبار مدل‌ها اثبات و نشان داده شده که در مدل‌های پیشنهادی عملکرد واحدها در مراحل با واحدی روی مرز کارایی مقایسه می‌شود و مدل‌ها با رساندن مراحل به مرز کارایی، کل ساختار را کارا می‌کنند. از مدل‌های پیشنهادی در یک مطالعه کاربردی برای ارزیابی پایداری ۹ زنجیره تأمین شرکت‌های تولیدکننده رب گوجه استفاده شد. نتایج کارایی آن‌ها با چهار مدل و همچنین مقدار بهینه متغیرهای واحدهای ناکارا در هر یک از این مدل‌ها بیان شده است.

**کلیدواژه‌ها:** کارایی؛ ارزیابی عادلانه؛ تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای؛ پایداری زنجیره تأمین؛ مدل‌های غیرشعاعی.

**استناددهی:** ابراهیمی، امیر؛ سلیمانی دامنه، رضا؛ شول، عباس (۱۴۰۲). ترسیم مرز کارایی در ساختارهای دومرحله‌ای: رویکرد ورودی - خروجی محور شعاعی و غیرشعاعی. *چشم‌انداز مدیریت صنعتی*، ۱۳(۳)، ۱۹۵-۲۲۲.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۲۲، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۳۰، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۲۲، تاریخ اولین انتشار: ۱۴۰۲/۰۵/۳۱.

\* کارشناسی ارشد، گروه مدیریت، دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران.  
\*\* استادیار، گروه مدیریت، دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران.  
\*\*\* دانشیار، گروه مدیریت، دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران.  
Email: [r.soleymani@vru.ac.ir](mailto:r.soleymani@vru.ac.ir) نویسنده مسئول



## ۱. مقدمه

بهره‌گیری از سیستم ارزیابی عملکرد یک ضرورت اجتناب‌ناپذیر برای هر سازمان و مدیریت مربوطه است تا کسب‌وکار خود را به‌سوی بهره‌وری حداکثری سوق دهد و با توجه به اطلاعات به‌دست‌آمده بتواند سازمان تحت نظر را برای کارآمدن مدیریت کند. ارزیابی عملکرد، فرآیندی است که به‌منظور آگاهی از عملکرد سازمان و ارائه بازخوردهای لازم برای بهبود و ارتقای آن اجرا می‌شود تا نتیجه را با اهداف و استانداردهای ازپیش‌تعیین‌شده مقایسه کند و به شناسایی انحراف‌ها از اهداف عملکردی بپردازد [۳۹]. هر سازمانی به‌منظور اطلاع از میزان مطلوبیت و مرغوبیت فعالیت‌های خود، به‌خصوص در محیط‌های پیچیده و پویا، نیاز مبرم به ارزیابی دارد. به همین دلیل تکنیک‌های بسیاری از ارزیابی عملکرد برای تسهیل اجرای استراتژی‌ها و بهبود عملکرد سازمان مورداستفاده قرار می‌گیرند تا باعث برنامه‌ی رشد و توسعه و ایجاد فرصت‌های تعالی سازمانی شود. یکی از تکنیک‌هایی که به‌وفور از آن استفاده می‌شود و سهم زیادی در پژوهش‌های علمی حوزه‌های مرتبط با سنجش و ارزیابی دارد، تحلیل پوششی داده‌ها<sup>۱</sup> (DEA) است. این تکنیک نخستین بار توسط چارلز و همکاران<sup>۲</sup> (۱۹۷۸)، به‌عنوان روش ناپارامتریک تحلیل کارایی برای مقایسه واحدهای تصمیم‌گیرنده نسبت به مرز کارایی معرفی شد [۴] و به دلیل امکان لحاظ‌کردن ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه، عدم‌نیاز به اطلاعات اولیه درباره اوزان آن‌ها و بی‌نیاز بودن به تعیین مشخصات پارامتریک (همچون تابع تولید)، با سرعت زیادی رشد کرد و همچنان در حال توسعه و گسترش است و به‌عنوان یکی از مهم‌ترین حوزه‌های در حال رشد علم مدیریت و تحقیق در عملیات موردتوجه پژوهشگران قرار گرفته است.

مدل‌های اولیه DEA به‌دلیل نادیده‌گرفتن ساختار داخلی واحدها، در محاسبه کارایی نظام‌های پیچیده و فرایندهایی که متشکل از چند مرحله و دارای اندازه‌های میانی هستند، مشکل دارند و نمی‌توانند کارایی کل سیستم و کارایی هر یک از فرایندهای داخلی را به‌درستی محاسبه کنند. در واقع مدل‌های اولیه برای ارزیابی کارایی ساختارهای تک‌مرحله‌ای مناسب هستند؛ در حالی که در بسیاری از کاربردها، واحدها ساختار دومرحله‌ای دارند [۳۵]. برای رفع این عیب‌ها، مدل‌های شبکه‌ای برای ارزیابی عملکرد انواع ساختارهای چندمرحله‌ای از جمله دومرحله‌ای پیشنهاد شده است. این مدل‌ها جعبه‌سیاه ساختار دومرحله‌ای را باز و روابط بین دو زیرواحد را بررسی می‌کنند. در این ساختار بخشی از خروجی‌های مرحله نخست، به‌عنوان ورودی وارد مرحله دوم می‌شود و تعامل بین دو مرحله از طریق این متغیرهای میانی است. تعیین مقدار بهینه این متغیرها و ترسیم مرز کارایی چالش اصلی ارزیابی این ساختارها است. در واقع با توجه به اینکه افزایش (کاهش) متغیرهای میانی به افزایش (کاهش) کارایی مرحله اول و کاهش (افزایش)

1. Data Envelopment Analysis  
2. Charnes, et al.

کارایی مرحله دوم منجر می‌شود، در تعیین مقدار بهینه آن بین دو مرحله تضاد وجود دارد. مدل‌های دومرحله‌ای موجود، مفهوم عدالت را برای تعیین مقدار بهینه متغیرهای میانی نادیده می‌گیرند و عملکرد ضعیف یک مرحله روی نمره کارایی مرحله دیگر تأثیر می‌گذارد [۴۰]. در رویکرد خروجی محور مدل‌های موجود، کارایی مرحله دوم با توجه به مقدار بهینه متغیرهای میانی که بیشتر از مقدار فعلی است، محاسبه می‌شود؛ درحالی‌که این مرحله با مقادیر فعلی متغیرهای میانی، خروجی‌های خود را تولید کرده و غیرمنصفانه است که با در نظر گرفتن ورودی‌های بیشتر برای آن ارزیابی شود؛ همچنین در رویکرد ورودی محور، مقدار بهینه ورودی‌های مرحله نخست با توجه به مقدار بهینه خروجی‌های این مرحله (متغیرهای میانی) تعیین می‌شود؛ درحالی‌که باید با مقادیر فعلی خروجی‌های آن، مقدار بهینه ورودی‌ها و کارایی این مرحله محاسبه شود؛ بنابراین مدل‌های دومرحله‌ای پیشینه پژوهش در حل تعارض دو مرحله و ارزیابی منصفانه مراحل و ترسیم مرز کارایی ناموفق بودند [۴۵]. در این پژوهش مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی برای حل این چالش‌ها در هر دو شرایط بازده به مقیاس ثابت<sup>۱</sup> (CRS) و بازده به مقیاس متغیر<sup>۲</sup> (VRS) ارائه می‌شود.

مفهوم پایداری در سال‌های اخیر به دلیل افزایش مشکلات اجتماعی و مسائل زیست‌محیطی از جمله تغییرات اقلیمی، آلودگی هوا و کاهش سریع منابع طبیعی مورد توجه قرار گرفته است؛ بنابراین از طرف ذی‌نفعان فشارهایی بر مدیریت زنجیره تأمین وجود دارد تا نه تنها بر معیارهای اقتصادی، بلکه بر معیارهای اجتماعی و زیست‌محیطی نیز تمرکز کنند. مدیریت زنجیره تأمین تنها به معیارهای اقتصادی توجه دارد و معیارهای اجتماعی و محیطی را نادیده می‌گیرد؛ اما در مدیریت زنجیره تأمین پایدار مدیران بر خطوط سه‌گانه، یعنی معیارهای اجتماعی، زیست‌محیطی و اقتصادی تمرکز می‌کنند [۳]. سازمان‌ها با توجه هم‌زمان به افزایش کارایی داخلی و ادغام مفهوم پایداری در عملیات زنجیره تأمین به دنبال دستیابی به موقعیت رقابتی در بازار امروزی هستند. زنجیره تأمین پایدار یک موضوع حیاتی برای سازمان‌ها است و این فرصت را به شرکت‌ها می‌دهد تا با در نظر گرفتن عوامل محیطی، اجتماعی و اقتصادی از سایرین متمایز شوند. یکی از جنبه‌های مهم مدیریت زنجیره تأمین، ارزیابی عملکرد و محاسبه کارایی هر یک از اعضا و کل شبکه در راستای پایداری است [۲۸]. ارزیابی عملکرد زنجیره تأمین پایدار یک وظیفه مهم برای هر نوع سازمانی است و مدیران نیاز به طراحی یک مدل اندازه‌گیری عملکرد مناسب برای ارزیابی پایداری زنجیره تأمین دارند. یکی از تکنیک‌های ارزیابی پایداری زنجیره تأمین، تحلیل پوششی داده‌ها است. مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها به دلیل دیدگاه جعبه‌سیاه امکان ارزیابی زنجیره‌های تأمین را ندارند؛ بنابراین برای ارزیابی پایداری زنجیره تأمین باید از مدل‌های

1. Constant Returns to Scale

2. Variable Returns to Scale

شبکه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کرد. صنعت غذایی با چالش‌های متعددی مواجه است که مدیران را مجبور می‌کند پایداری زنجیره‌های تأمین را برای رقابتی‌ماندن ارزیابی کنند. یکی از مهم‌ترین صنایع غذایی در ایران صنعت تولید رب است [۱۷]. در این پژوهش از مدل‌های ارائه‌شده در یک مثال کاربردی برای ارزیابی پایداری زنجیره‌های تأمین شرکت‌های تولیدکننده رب گوجه استفاده می‌شود.

## ۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

فارل<sup>۱</sup> (۱۹۵۷)، با استفاده از چند ورودی و یک خروجی، کارایی یک واحد تولیدی را اندازه‌گیری کرد [۹]. چارنز و همکاران (۱۹۷۸)، روش فارل را به حالت چند ورودی - چند خروجی تعمیم دادند [۴]. مدل آن‌ها به سرعت مورد توجه قرار گرفت و پس از آن مدل‌های مختلف DEA توسعه داده شد. از آنجاکه مدل‌های اولیه برای ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای قابل استفاده نبودند، مدل‌های دومرحله‌ای توسعه داده شدند. کائو و هوانگ<sup>۲</sup> (۲۰۰۸، ۲۰۱۰، ۲۰۱۱)، کائو (۲۰۰۹، ۲۰۱۴a) مدل‌های مضربی را به منظور محاسبه کارایی کل و تجزیه آن برای انواع ساختارهای دومرحله‌ای ارائه کردند که کارایی کل حاصل ضرب کارایی دو مرحله بود [۱۸، ۱۹، ۲۳، ۲۴، ۲۵]. هالکوس و آرگیروپولو<sup>۳</sup> (۲۰۲۱)، با تعمیم مدل کائو و هوانگ (۲۰۰۸)، به محیط‌های با متغیرهای نامطلوب، از یک مدل مضربی دومرحله‌ای برای ارزیابی کارایی ۲۳ کشور در زمینه کنترل آلاینده‌ها طی سال‌های ۱۹۹۰ تا ۲۰۱۷ استفاده کردند [۱۴]. چن و همکاران<sup>۴</sup> (۲۰۰۹)، کوک و همکاران<sup>۵</sup> (۲۰۱۰) و گوان و چن<sup>۶</sup> (۲۰۱۲)، مدل‌های مضربی جمعی را که در آن‌ها متغیرهای میانی هم ورودی و هم خروجی در نظر گرفته شده بود، پیشنهاد کردند [۶، ۷، ۱۳]. در مدل‌های آن‌ها، کارایی کل میانگین حسابی موزون مراحل و نسبت منابع هر مرحله به کل منابع، وزن مراحل را تشکیل می‌داد. تن و تسوتسوی<sup>۷</sup> (۲۰۰۹، ۲۰۱۴)، کائو (۲۰۱۸) و حسن‌زاده و مصطفایی (۲۰۱۹) مدل‌های شبکه‌ای غیرشعاعی مبتنی بر متغیرهای کمکی را برای ساختارهای شبکه‌ای از جمله دومرحله‌ای متوالی ارائه کردند [۱۶، ۲۲، ۳۲، ۳۳]. فکویاما و وبر<sup>۸</sup> (۲۰۱۰)، عملکرد ۸۶ بانک ژاپنی را با استفاده از مدل شبکه‌ای دومرحله‌ای با متغیرهای کمکی ثابت ارزیابی کردند [۱۱].

1. Farrell
2. Kao & Hwang
3. Halkos & Argyropoulou
4. Chen, et al.
5. Cook, et al.
6. Guan & Chen
7. Tone & Tsutsui
8. Fukuyama & Weber

اوکیران و مک‌کریستال<sup>۱</sup> (۲۰۱۴)، مدلی برای فرآیند دومرحله‌ای با به‌کارگیری همه ورودی‌ها و خروجی‌های واحدها، برای مرتب‌کردن متغیرهای کمکی پیشنهاد دادند [۲].

وانگ و همکاران<sup>۲</sup> (۲۰۲۱)، با تجزیه عملکرد بهره‌برداری از منابع آبی صنایع به دو مرحله متوالی، مدل کارایی متقاطع را برای آن توسعه دادند [۳۸]. آن‌ها بر مبنای رویکرد پیشنهادی، کارایی سیستم بهره‌برداری از منابع آبی ۳۱ منطقه در چین را طی سال‌های ۲۰۱۰ تا ۲۰۱۵ بررسی کردند. ژانگ و همکاران<sup>۳</sup> (۲۰۲۱) یک مدل دومرحله‌ای پویا را برای ارزیابی آلودگی هوا صنایع چین پیشنهاد دادند. آن‌ها بر اساس این مدل، اثربخشی سیاست‌های کنترل آلودگی را بر اساس داده‌های سال ۲۰۰۷ تا ۲۰۱۵ ارزیابی کردند [۴۳]. موتینهو و مادالانو<sup>۴</sup> (۲۰۲۱)، بهره‌وری زیست‌محیطی ۲۷ کشور عضو اتحادیه اروپا را طی دوره ۲۰۰۸ تا ۲۰۱۸ با مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای بررسی کردند [۲۹]. ژانگ و همکاران (۲۰۱۹)، یک مدل DEA دومرحله‌ای برای تخصیص منابع در رفع آلودگی صنایع کشور چین پیشنهاد دادند [۴۲]. آن‌ها از مدل‌های خود برای ارزیابی تخصیص منابع ۳۰ استان چین طی سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۵ بهره گرفتند. فلگل و همکاران<sup>۵</sup> (۲۰۲۲)، از مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای برای ارزیابی کارایی صنایع غذایی مکزیکی استفاده کردند [۱۰]. آن‌ها در مرحله نخست، کارایی تولید و در مرحله دوم، کارایی سرمایه‌گذاری را ارزیابی کردند. لی و همکاران<sup>۶</sup> (۲۰۱۹)، تجزیه کارایی در مدل‌های DEA دومرحله‌ای را بررسی کردند [۲۷]. آن‌ها بیان کردند که سه روش اصلی برای تجزیه کارایی وجود دارد: ۱. تجزیه یکنواخت کارایی؛ ۲. تجزیه مبتنی بر بازی چانه‌زنی نش؛ ۳. تجزیه بر مبنای اولویت. این روش‌ها بر اساس مفروضات مختلف به تجزیه کارایی متفاوت و سردرگمی پژوهشگران منجر شده است. آن‌ها برای مصالحه بین این تفاوت‌ها به تعریف مجدد عدالت در تجزیه کارایی بر مبنای رتبه کارایی پرداختند و یک مدل مبتنی بر رتبه با دو پارامتر توسعه دادند. ژائو و همکاران<sup>۷</sup> (۲۰۲۱)، با تعریف کارایی همکاری، یک رویکرد مبتنی بر DEA دومرحله‌ای برای ارزیابی اثر همکاری در زنجیره تأمین پیشنهاد کردند [۴۴]. آن‌ها نشان دادند که مدل مضربی پیشنهادی آن‌ها معادل فرم پوششی آن است و در یک مثال کاربردی برای ارزیابی پایداری زنجیره تأمین از آن بهره گرفتند. سو و سان<sup>۸</sup> (۲۰۱۸)، با استفاده از یک مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای جدید، ارزیابی پایداری زنجیره‌های تأمین را در حضور خروجی‌های نامطلوب و عوامل دارای نقش دوگانه در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه انجام دادند [۳۱]. وانگ

1 Avkiran &amp; McCrystal

2 Wang, et al.

3 Zhang, et al.

4 Moutinho &amp; Madaleno

5 Flegl, et al.

6 Li, et al.

7 Zhao, et al.

8 Su &amp; Sun

و همکاران<sup>۱</sup> (۲۰۲۰) مدل DEA دومرحله‌ای تصادفی جدیدی را برای ارزیابی کارایی زیست‌محیطی با در نظر گرفتن خروجی‌های مطلوب و نامطلوب ارائه کردند [۳۷]. ژا و همکاران<sup>۲</sup> (۲۰۱۶)، نخستین پژوهشگرانی بودند که مدل‌های دومرحله‌ای مبتنی بر مطلوبیت با مفهوم ارزیابی منصفانه را پیشنهاد کردند [۴۱]. مدل آن‌ها برای ارزیابی مطلوبیت مراحل مختلف در سناریوهای متفاوت استفاده شد. ان و همکاران (۲۰۱۷)، رویکردی را پیشنهاد کردند که عدالت بین بخش‌های یک ساختار دومرحله‌ای را در زمان تعیین اهداف برای محصولات میانی در نظر می‌گیرد [۱]. آن‌ها یک بازی چانه‌زنی نش را با توسعه یک مدل DEA با مفهوم عدالت برای بیان راه‌حل چانه‌زنی نش در ساختارهای دومرحله‌ای ایجاد کردند. ژو و همکاران<sup>۳</sup> (۲۰۲۰)، ارزیابی کارایی متقاطع DEA را بر اساس مفهوم عدالت مورد بحث قرار دادند و یک مدل ماکس-مین برای انتخاب مجموعه‌ای از وزن‌های بهینه برای هر واحد ارائه کردند تا حداقل عدالت را در مقایسه با دیگران حداکثر کند [۴۵].

مطالعات بیان‌شده و سایر مدل‌های شبکه‌ای را می‌توان به دسته‌های مختلفی تقسیم کرد: کوک، و همکاران<sup>۴</sup> (۲۰۱۰)، مدل‌های ارائه‌شده برای ساختارهای دومرحله‌ای را به چهار دسته مدل‌های استاندارد، مدل‌های تجزیه کارایی، مدل‌های شبکه‌ای و مدل‌های نظریه بازی‌ها تقسیم کردند. در مدل‌های استاندارد برای هر مرحله و ساختار کلی یک مدل جداگانه و مستقل استفاده می‌شود و ارتباط بین کارایی کل و کارایی اجزا در نظر گرفته نمی‌شود. در مدل‌های تجزیه کارایی ارتباط کارایی کل و مراحل به صورت ضربی یا جمعی است [۸]. کروناکوس و همکاران<sup>۵</sup> (۲۰۱۹)، نشان دادند که رویکرد تجزیه دارای خطا در محاسبه کارایی است [۲۶]. در مدل‌های شبکه‌ای، دو مرحله دارای ورودی و خروجی مازاد هستند. در مدل‌های نظریه بازی‌ها برای ارزیابی ساختارهای شبکه‌ای از مفاهیم نظریه بازی‌ها استفاده می‌شود و از دو رویکرد بازی همکارانه و غیرهمکارانه (رهبر - پیرو) بهره می‌گیرند. آن‌ها نشان دادند که همه مدل‌های چهارگانه بالا را می‌توان در قالب دو دسته بازی همکارانه و رهبر - پیرو تقسیم کرد. در بازی‌های همکارانه همانند رویکرد تجزیه هدف کارایی کل است و سپس کارایی مراحل محاسبه می‌شود؛ بنابراین نتایج آن دارای خطا است [۲۶]. در مدل‌های مبتنی بر بازی رهبر - پیرو مقدار بهینه متغیرهای میانی توسط مرحله رهبر تعیین می‌شود و بنابراین کارایی مرحله پیرو غیرمنصفانه ارزیابی می‌شود.

- 
1. Wang, et al.
  2. Zha, et al.
  3. Zhu, et al.
  4. Cook, et al.
  5. Koronakos, et al.

هالکوس و همکاران<sup>۱</sup> (۲۰۱۴)، مدل‌های دومارحله‌ای را به دسته‌های مستقل، متصل، رابطه‌ای و نظریه بازی‌ها تقسیم کردند [۱۵]. در مدل‌های متصل از جمله مدل‌های زنجیره ارزش، کارایی مراحل هم‌زمان با کارایی کل و یا بعد از محاسبه کارایی کل محاسبه می‌شود. در برخی مدل‌های این دسته امکان محاسبه کارایی مراحل وجود ندارد. در مدل‌های رابطه‌ای، کارایی کل میانگین موزون جمعی یا ضربی مراحل است و وزن متغیرهای میانی برای هر دو مرحله یکسان است. کائو (۲۰۱۴b)، مطالعات NDEA را بر اساس مدل‌های استفاده‌شده و ساختار مورد مطالعه طبقه‌بندی کرد [۲۰]. وی مدل‌ها را به ۹ دسته تقسیم کرد: ۱. مدل‌های مستقل؛ ۲. مدل‌های اندازه‌گیری فاصله سیستم؛ معیار فاصله سیستم به منظور یافتن حداقل اندازه ( $\theta$ ) یا حداکثر فاصله ( $\phi$ ) در راستای کارا شدن سیستم استفاده می‌شود؛ ۳. مدل‌های اندازه‌گیری فاصله فرایند؛ هر فرایند ضریب فاصله ( $\theta$  یا  $\phi$ ) یکسانی دارد و کارایی سیستم میانگین موزون کارایی فرایندها است؛ ۴. مدل‌های اندازه‌گیری فاصله عامل؛ در این مدل‌ها به هر عامل اجازه داده می‌شود که ضریب فاصله متفاوتی داشته باشد؛ ۵. مدل اندازه‌گیری مبتنی بر متغیرهای کمبود؛ ۶. مدل‌های فرم نسبت کارایی سیستم؛ کارایی سیستم به عنوان مجموع موزون خروجی‌های برون‌زا به ورودی‌های برون‌زا تعریف می‌شود و معمولاً در شکل مضربی ارائه می‌شوند؛ ۷. مدل‌های فرم نسبت کارایی فرایند؛ بر خلاف دسته قبلی که کارایی سیستم دغدغه اصلی برای یافتن وزن‌های بهینه است. در اینجا با توجه به کارایی فرایند (مجموع موزون خروجی‌های فرایند به ورودی‌های فرایند) وزن‌ها محاسبه می‌شود؛ ۸. مدل‌های نظریه بازی‌ها و ۹. مدل‌های مبتنی بر ارزش؛ هدف به حداکثر رساندن خروجی کل یا سود مربوط به یک سیستم شبکه‌ای در چارچوب محدودیت‌ها است. ساختارهای مورد مطالعه نیز به متوالی، موازی، ترکیبی، سلسله‌مراتبی و پویا تقسیم شدند. در مدل‌های اندازه‌گیری فاصله سیستم ضریب همه ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم با وجود اینکه مربوط به فرایندهای متفاوت و در نتیجه مجموعه امکان تولید متفاوتی هستند، یکسان است و بنابراین نمرات کارایی را کمتر از میزان واقعی نشان می‌دهند. در مدل‌های اندازه‌گیری فرایند و عامل رویکرد یا ورودی‌محور و یا خروجی‌محور است؛ اما در پژوهش حاضر هم‌زمان انبساط خروجی‌ها و انقباض ورودی‌ها مورد توجه قرار گرفته است. مزیت مدل‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی (NSBM) غیرشعاعی بودن آن‌ها است که در پژوهش حاضر نیز مدل غیرشعاعی توسعه داده شده است؛ اما در مدل‌های NSBM در محاسبه کارایی کل و مراحل یا متغیرهای کمکی مربوط به میانی‌ها نادیده گرفته شده و یا بیشتر از سهم واقعی در نظر گرفته شده است. مدل‌های فرم نسبت جهت اندازه‌گیری فاصله سیستم و فاصله فرایند مضربی بوده و از تعیین مرز کارایی عاجز هستند. مدل‌های مبتنی بر ارزش عمدتاً برای ساختارهای پویا استفاده می‌شوند.

---

1. Halkos, et al.

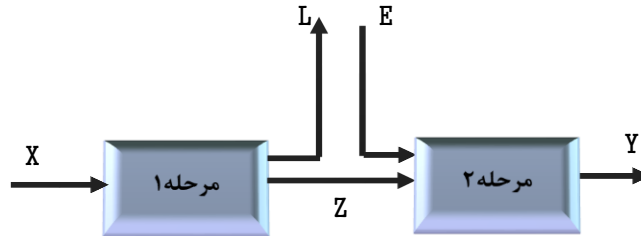


کروناکوس (۲۰۱۹)، پاراداریم‌های ارزیابی ساختارهای شبکه‌ای را به دو پاراداریم ارزیابی مستقل و پاراداریم ارزیابی مشترک تقسیم کرد [۲۶]. در پاراداریم ارزیابی مستقل، مدل‌های استاندارد DEA برای ارزیابی واحد و زیرفرایندها به صورت جداگانه استفاده می‌شود. در پاراداریم ارزیابی مشترک ساختار داخلی واحدها و وابستگی‌های متقابل زیرفرایندها در نظر گرفته می‌شود و شامل چهار رویکرد تجزیه کارایی (ضربی و جمعی)، ترکیب کارایی، ارزیابی مبتنی بر متغیرهای کمبود و رویکرد سیستم‌محور است. در رویکرد تجزیه ابتدا کارایی کل و سپس کارایی مراحل محاسبه می‌شود و در رویکرد ترکیب برعکس. در رویکرد مبتنی بر متغیرهای کمبود، کارایی مراحل و کل به صورت هم‌زمان محاسبه می‌شود؛ اما تابع متفاوتی برای کارایی کل بر اساس محور انتخابی (ورودی‌محور، خروجی‌محور و بدون محور) در نظر گرفته می‌شود. در رویکرد سیستم-محور کارایی کل بدون کارایی مراحل محاسبه شده و هیچ رابطه‌ای بین کارایی کل و مراحل بیان نمی‌شود. وی نشان داد که مدل‌های رویکرد تجزیه نمرات کارایی منحصر به فرد ارائه نمی‌کنند و تجزیه کارایی جمعی دارای نتایج کارایی اریب‌دار به دلیل وزن‌های درون‌زا است و رویکرد ترکیب می‌تواند بر این عیوب غلبه کند. وی پیشنهاد کرد که مدل‌های رویکرد ترکیب توسعه داده شوند. در این راستا مدل‌های پژوهش مبتنی بر رویکرد ترکیب و با محاسبه کارایی مراحل، کارایی کل به دست آورده می‌شود. با توجه به عیوب و ضعف‌های دسته‌های مختلف مدل‌های شبکه‌ای، این پژوهش درصدد ارائه مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی است که با ترسیم مرز کارایی به تعیین منصفانه مقادیر متغیرهای میانی و نمرات کارایی مراحل پردازش؛ درحالی‌که مدل‌های پوششی موجود برای تعیین وضعیت عملکرد مراحل مناسب نیستند و پیشنهاد شده است از مدل‌های مضربی برای این منظور استفاده شود [۵]، مدل‌های پژوهش نمرات کارایی عادلانه‌ای از مراحل ارائه می‌کنند. در واقع مدل‌های پژوهش هر دو مزیت ترسیم مرز کارایی و تعیین مقادیر کارایی مراحل را دارند. در مدل‌های پیشنهادی برخلاف مدل‌های پیشینه بهبود یک مرحله وابسته به مرحله دیگر نیست. مدل‌های ارائه شده برای انواع ساختارهای دومرحله‌ای از جمله دارای ورودی - خروجی مازاد و شرایط بازده به مقیاس متغیر قابل استفاده هستند. کائو (۲۰۱۴b) و کروناکوس (۲۰۱۹)، پیشنهاد استفاده از مدل‌های موجود یا جدید را برای حل مسائل واقعی به عنوان ارزشمندترین ایده پژوهش‌های آتی مطرح کردند [۲۰، ۲۶]. در این پژوهش با توجه به اهمیت ارزیابی پایداری زنجیره تأمین صنایع غذایی از مدل‌ها در یک مطالعه کاربردی در صنعت تولید رب استفاده شد.

### ۳. روش‌شناسی پژوهش

**مدل‌های پژوهش.** شکل ۱، یک ساختار دومرحله‌ای با ورودی و خروجی مازاد را نشان می‌دهد. یکی از چالش‌های مدل‌سازی چنین ساختاری، ترسیم مرز کارایی و تعیین منصفانه مقدار بهینه

متغیرها از جمله متغیرهای میانی ( $Z$ ) است؛ چراکه در تعیین مقدار بهینه آن‌ها بین دو مرحله تضاد وجود دارد. در کاربردهایی مانند زنجیره تأمین که دو مرحله، دو شرکت متفاوت هستند، این تضاد بیشتر دیده می‌شود. از طرف دیگر گاهی تعیین مقدار متغیرهای میانی به عواملی خارج از اراده دو مرحله برمی‌گردد؛ مانند قیمت فروش محصولات از تأمین‌کننده به تولیدکننده در زنجیره تأمین که به قیمت بازار بستگی دارد.



شکل ۱. ساختار دومرحله‌ای متوالی

در این پژوهش تلاش شده است با ثابت‌نگه‌داشتن متغیرهای میانی در سطح فعلی، مدل‌هایی برای ارزیابی و تعیین کارایی دومرحله به‌گونه‌ای که هم مراحل و هم کل ساختار کارا شود، ارائه گردد. در این مدل‌ها مرحله نخست ورودی‌محور و مرحله دوم خروجی‌محور کارا می‌شوند. به این ترتیب که مرحله نخست با ثابت‌نگه‌داشتن خروجی‌های این مرحله ( $L$  و  $Z$ ) در سطح فعلی، به دنبال کاهش ورودی‌ها ( $X$ ) برای رسیدن به کارایی است و مرحله دوم با ثابت‌نگه‌داشتن ورودی‌های این مرحله ( $E$  و  $Z$ ) به دنبال افزایش خروجی‌ها ( $Y$ ) برای رسیدن به کارایی خواهد بود؛ بنابراین با کاراشدن دومرحله، کل ساختار کارا می‌شود. به‌منظور ساختن و ارائه مدل، فرض می‌شود که  $n$  واحد تصمیم‌گیرنده با ساختار شکل ۱، موجود است. پارامترها، اندیس‌ها و متغیرهای مدل در جدول ۱، مشاهده می‌شود.

جدول ۱. متغیرهای مدل

متغیر	شرح
$J$	اندیس معرف تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده، $j=1,2,\dots,n$
$X_{ij}$	ورودی $i$ ام ( $i=1,\dots,I$ ) مرحله اول واحد $j$ ام
$L_{hj}$	خروجی $h$ ام ( $h=1,\dots,H$ ) مرحله اول واحد $j$ ام (خروجی مازاد)
$Z_{mj}$	متغیر میانی $m$ ام ( $m=1,\dots,M$ ) واحد $j$ ام
$E_{fj}$	ورودی $f$ ام ( $f=1,\dots,F$ ) مرحله دوم واحد $j$ ام (ورودی مازاد)
$Y_{rj}$	خروجی $r$ ام ( $r=1,\dots,R$ ) مرحله دوم واحد $j$ ام
$\theta$	نسبت انقباض ورودی‌های مرحله اول
$\varphi$	نسبت انبساط خروجی‌های مرحله دوم

با توجه به تفاوت واحد مرجع در محاسبه کارایی هر مرحله،  $\lambda$ ها با اندیس‌های ۱ و ۲ از یکدیگر متمایز شده‌اند که به ترتیب مرتبط با واحد مرجع مرحله ۱ و ۲ هستند.

**مدل شعاعی پیشنهادی.** مجموعه امکانات تولید<sup>۱</sup> (PPS) برای شکل ۲، به این صورت است: X بتواند L و Z را تولید کند و Z و E بتوانند Y را تولید کنند. در واقع فضای تولید دو قسمتی است و Z رابط بین این دو قسمت است.

رابطه (۱)

$$PPS_N = \left\{ (X, L, Z, E, Y) \mid X \geq \sum \lambda_{1j} X, L \leq \sum \lambda_{1j} L, Z \leq \sum \lambda_{1j} Z, Z \geq \sum \lambda_{2j} Z, E \geq \sum \lambda_{2j} E, Y \leq \sum \lambda_{2j} Y, \lambda_{1j} \geq 0, \lambda_{2j} \geq 0 \right\}$$

برای محاسبه کارایی‌ها، ورودی‌های مرحله نخست با ورودی‌های بهینه و خروجی‌های مرحله دوم با خروجی‌های بهینه مقایسه می‌شود؛ بنابراین با توجه به PPS مرحله نخست، نسبت کاهش ورودی‌های این مرحله ( $\theta$ )، جهت تولید مقدار فعلی خروجی‌های آن و همچنین با توجه به PPS مرحله دوم، نسبت افزایش خروجی‌های این مرحله ( $\phi$ ) با مقدار فعلی ورودی‌های آن تعیین می‌شود؛ بنابراین الگوی واحد تحت بررسی ( $DMU_0$ ) با  $(X, L, Z, E, Y)$  ورودی، خروجی و متغیر میانی، روی مرز کارایی نقطه  $(\theta X, L, Z, E, \phi Y)$  است. قسمت اول PPS تعیین‌کننده مقدار  $\theta X$  و قسمت دوم تعیین‌کننده مقدار  $\phi Y$  است. مدل ۱، بر همین مبنا این نسبت‌ها را برای رسیدن به مرز شبکه محاسبه می‌کند.

رابطه (۲)

$$\text{Max } \varphi - \theta$$

$$\text{s.t.}$$

$$(1) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} X_{ij} \leq \theta X_{io} \quad i = 1, \dots, I$$

$$(2) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} L_{hj} \geq L_{ho} \quad h = 1, \dots, H$$

$$(3) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} Z_{mj} \geq Z_{mo} \quad m = 1, \dots, M$$

$$(4) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} Z_{mj} \leq Z_{mo} \quad m = 1, \dots, M$$

$$(5) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} E_{fj} \leq E_{fo} \quad f = 1, \dots, F$$

$$(6) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} Y_{rj} \geq \varphi Y_{ro} \quad r = 1, \dots, R$$

$$\lambda_{1j}, \lambda_{2j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

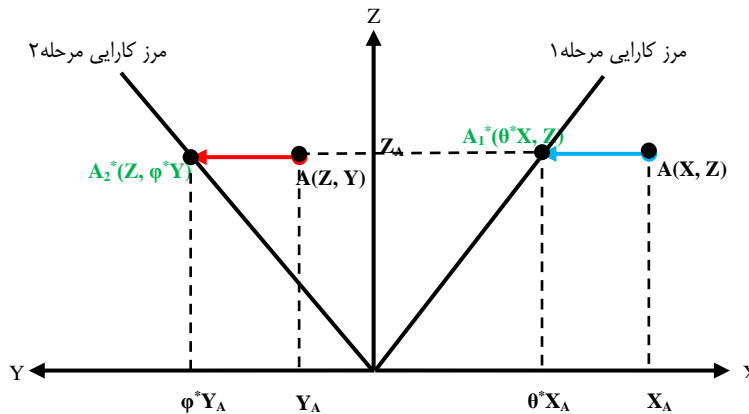
$$\varphi, \theta \text{ free}$$

تابع هدف، ضریب خروجی‌ها ( $\varphi$ ) را تا آنجا که مجموعه امکان تولید اجازه می‌دهد، زیاد می‌کند و ضریب ورودی‌ها ( $\theta$ ) را تا حد امکان کاهش می‌دهد؛ به عبارت دیگر به دنبال حداکثر کردن خروجی‌های مرحله دوم و حداقل کردن ورودی‌های مرحله اول بدون خروج از PPS است. به دلیل اینکه  $\theta$  با ضریب منفی در تابع هدف Max آمده، معادل  $\theta$  با ضریب مثبت در تابع هدف Min است. محدودیت ۱، تضمین می‌کند که مقدار بهینه ورودی‌های مرحله اول خارج از مجموعه امکان تولید قرار نگیرد. محدودیت‌های ۲ و ۳، متناظر با خروجی‌های مرحله اول هستند که در سطح فعلی حفظ می‌شوند. به عبارت دیگر سه محدودیت اول و قسمت دوم تابع هدف به دنبال ساختن یک واحد مجازی از ترکیب محدب سایر واحدها به گونه‌ای است که خروجی‌های مرحله اول این واحد مجازی برابر یا بیشتر از خروجی‌های این مرحله واحد تحت ارزیابی باشد و کمترین ورودی ممکن را برای تولید این میزان خروجی با توجه به PPS داشته باشد. محدودیت‌های ۴ و ۵، تضمین می‌کنند که ورودی‌های مرحله دوم در سطح فعلی بماند و محدودیت ۶ خروجی‌های مرحله دوم را به شرط ماندن در مجموعه امکان تولید حداکثر می‌سازد. سه محدودیت آخر و قسمت اول تابع هدف، واحدی را از ترکیب محدب DMUها می‌سازد که با ورودی‌های فعلی مرحله دوم واحد تحت ارزیابی، حداکثر خروجی ممکن را داشته باشد. بر اساس خروجی مدل ۱،

کارایی مرحله اول برابر با  $\theta^*$ ، مرحله دوم  $\frac{1}{\varphi}$  و کارایی کل با توجه به اینکه نمرات کارایی از نوع نسبت هستند، میانگین هندسی دومرحله است:

$$\sqrt{\frac{\theta^*}{\varphi}} = \text{کارایی کل}$$

شکل ۲، تفسیر هندسی مدل پژوهش را نشان می‌دهد. به دلیل امکان بیان در یک نمودار دوبعدی، فرض شده است که ساختار دومرحله‌ای فاقد ورودی و خروجی مازاد (E و L) است.



شکل ۲. تعبیر هندسی مدل

سمت راست و چپ نمودار به ترتیب مجموعه امکان تولید و مرز کارایی مرحله اول و دوم را نشان می‌دهند. واحد تحت ارزیابی  $A(X, Z, Y)$  را در نظر بگیرید.  $A_1^*(\theta^*X, Z)$  تصویر این واحد روی مرز کارایی مرحله اول و  $A_2^*(Z, \varphi^*Y)$  تصویر این واحد روی مرز کارایی مرحله دوم است. واحد مورد ارزیابی در مرحله اول برای رسیدن به نقطه تصویر، با حفظ خروجی‌های خود ( $Z$ ) در سطح فعلی، به دنبال کاهش ورودی‌هایش از مقدار فعلی ( $X$ ) به مقدار بهینه ( $\theta X$ ) است (عدد  $\theta$  کوچک‌تر مساوی یک است) و در مرحله دوم برای رسیدن به نقطه بهینه با ثابت نگاه داشتن ورودی‌هایش ( $Z$ )، خروجی‌هایش را از مقدار فعلی ( $Y$ ) به مقدار بهینه ( $\varphi Y$ ) روی مرز کارایی می‌رساند ( $\varphi$  عددی بزرگ‌تر مساوی یک است). به عبارت دیگر در مرحله نخست ورودی محور و در مرحله دوم خروجی محور عمل می‌کند و مقدار بهینه متغیرهای میانی که محل چالش دومرحله است، ثابت و در سطح فعلی باقی می‌ماند. مدل‌های ارائه شده بر همین مبنا عمل کرده و

کارایی‌ها را محاسبه و الگو معرفی می‌کنند. در ادامه با استفاده از قضایای ریاضی، اعتبار و روایی مدل ارائه‌شده اثبات می‌شود.

قضیه ۱: مدل ۱، همواره جواب شدنی دارد (فاقد جواب بهینه نیست).

اثبات:

$$(\lambda_{10} = 1, \lambda_{1j} = 0, \forall j \neq 0, \lambda_{20} = 1, \lambda_{2j} = 0, \forall j \neq 0, \theta = 1, \varphi = 1)$$

یک جواب شدنی برای مدل ۱، است.

قضیه ۲: در جواب بهینه  $\varphi^* \geq 1, \theta^* \leq 1$  است.

اثبات:

فرض خلف: در فرض خلف سه حالت وجود دارد:

حالت ۱: در جواب بهینه  $\varphi^* \leq 1, \theta^* \geq 1$  و حداقل یکی مخالف ۱

در این حالت مقدار تابع هدف به دلیل اینکه یک عدد کوچک‌تر از یک منهای یک عدد بزرگ‌تر از یک می‌شود، قطعاً منفی است. مقدار تابع هدف در حالت فرض خلف کمتر از مقدار تابع هدف جواب شدنی قضیه ۱ که صفر است، می‌شود؛ بنابراین حالت ۱، فرض خلف باطل است.

حالت ۲: در جواب بهینه  $\varphi^* \geq 1, \theta^* > 1$  است.

اگر این حالت جواب بهینه مدل با  $(\lambda_{1j}^*, \lambda_{2j}^*, \varphi^*, \theta^*)$  باشد، تابع هدف  $\varphi^* - \theta^*$  می‌شود.

جواب  $(\lambda_{10}' = 1, \lambda_{1j}' = 0; j \neq 0, \theta' = 1, \lambda_{2j}^*, \varphi^*)$  یک جواب شدنی برای مدل ۱، است: در سه محدودیت اول، سمت چپ و راست محدودیت‌ها برابر می‌شوند و بنابراین صدق می‌کند. در سه محدودیت آخر نیز با توجه به اینکه همان مقادیر بهینه متغیرهای فرض خلف هستند، فرض شد که برقرار است. مقدار تابع هدف این جواب شدنی  $\varphi^* - 1$  می‌شود که از تابع هدف فرض خلف  $(\varphi^* - \theta^*)$  بیشتر است؛ چراکه  $\theta^* > 1$  است؛ بنابراین جواب فرض خلف نمی‌تواند بهینه باشد و حالت ۲، باطل است.

حالت ۳: در جواب بهینه  $\varphi^* < 1, \theta^* \leq 1$  است.

اگر این حالت جواب بهینه مدل با  $(\lambda_{1j}^*, \lambda_{2j}^*, \varphi^*, \theta^*)$  و تابع هدف  $\varphi^* - \theta^*$  باشد.

جواب  $(\lambda_{1j}^*, \theta^*, \lambda_{20}' = 1, \lambda_{2j}' = 0; j \neq 0, \varphi' = 1)$  یک جواب شدنی است:

در سه محدودیت اول به دلیل یکی بودن با حالت فرض خلف و در سه محدودیت دوم به دلیل برابری دو طرف برقرار است. مقدار تابع هدف این جواب شدنی  $1 - \theta^*$  می‌شود که از تابع هدف فرض خلف بیشتر است (چون  $\varphi^* < 1$ )؛ بنابراین حالت ۳، باطل است.

با توجه به اینکه سه حالت فرض خلف رد شدند، قضیه ۲، اثبات می‌شود؛ یعنی در جواب بهینه  $\varphi^* \geq 1, \theta^* \leq 1$  است. از آنجا که تنها ضریب تغییرات ورودی‌ها و فی ضریب تغییرات خروجی‌ها

است، همان طور که در تفسیر هندسی گفته شد، مدل به درستی ورودی‌ها را کاهش و خروجی‌ها را برای رسیدن به کارایی افزایش می‌دهد.

قضیه ۳: مقدار کارایی شبکه و کارایی مراحل همواره بین صفر تا یک است.

$\theta^*$  در واقع همان مقدار کارایی مرحله اول است که با توجه به قضیه ۲، کمتر یا مساوی ۱ می‌شود. کارایی مرحله دوم نیز معکوس  $\varphi^*$  است و چون معکوس هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی یک، عددی کمتر یا مساوی ۱ می‌شود، بنابراین کارایی مرحله دوم نیز کوچک‌تر یا مساوی ۱ خواهد بود. از آنجاکه کارایی کل از جذر حاصل ضرب (میانگین هندسی) کارایی مراحل به دست می‌آید، مقدار کارایی کل شبکه نیز کوچک‌تر یا مساوی یک خواهد بود؛ همچنین با توجه به اینکه  $\lambda_{1j}$  به ازای  $j=1, \dots, n$  همگی مثبت هستند؛ بنابراین سمت چپ محدودیت اولی مثبت می‌شود و از آنجاکه یک عدد مثبت نمی‌تواند کوچک‌تر از یک عدد منفی باشد، قطعاً تتا منفی نمی‌شود؛ بنابراین کارایی مرحله اول بزرگ‌تر از صفر می‌شود. کارایی مرحله دوم که عکس عددی بزرگ‌تر از یک و کارایی کل که میانگین هندسی دو عدد مثبت است، قطعاً مثبت خواهند شد.

تعریف ۱: یک DMU در یک مرحله کارا است، اگر کارایی آن مرحله یک شود.

تعریف ۲: یک واحد کارای شبکه‌ای (کارای کل) است، اگر کارایی شبکه آن ۱ شود (تابع هدف صفر شود). تنها در صورتی یک واحد کارای کل می‌شود که در هر دو مرحله کارا باشد.

قضیه ۴: در جواب بهینه  $\varphi^*$  بزرگ‌تر و  $\theta^*$  کوچک‌تر از یک جواب غیربهینه  $(\varphi, \theta)$  هستند.  
 $(\theta^* \leq \theta \text{ و } \varphi^* \geq \varphi)$

فرض خلف: سه حالت وجود دارد.

حالت ۱:  $\varphi^* \leq \theta$  و  $\theta^* \geq \varphi$  و حداقل یکی نامساوی

در این صورت  $\varphi^*, \theta^*$  نمی‌تواند جواب بهینه مدل باشد چون:

$$\varphi^* - \theta^* < \varphi - \theta$$

پس حالت ۱، فرض خلف باطل است.

حالت ۲:  $\varphi^* < \varphi$  و  $\theta^* \leq \theta$

اگر  $\varphi^*, \theta^*$  جواب بهینه مدل با  $(\lambda_{1j}^*, \lambda_{2j}^*, \theta^*, \varphi^*)$  و  $\varphi, \theta$  یک جواب موجه برای مدل با  $(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \theta, \varphi)$  (جواب شدنی ۱) باشد.  $(\lambda_{1j}^*, \lambda_{2j}^*, \theta^*, \varphi)$  یک جواب شدنی (جواب شدنی ۲) برای مدل است: با  $(\lambda_{1j}^*, \theta^*)$  محدودیت‌های ۱، ۲ و ۳، همان محدودیت‌های جواب بهینه فرض خلف و برقرار هستند. محدودیت‌های ۴، ۵ و ۶ با  $(\lambda_{2j}, \varphi)$  همان محدودیت‌های جواب شدنی ۱، هستند که فرض شد برقرار است. مقدار تابع هدف این جواب شدنی بزرگ‌تر از جواب بهینه فرض خلف است:

$$\varphi^* - \theta^* < \varphi - \theta^*$$

چون  $\varphi > \varphi^*$  است؛ بنابراین حالت ۲، باطل است.

حالت ۳:  $\varphi^* \geq \theta$  و  $\theta^* > \theta$

اگر  $\theta^*, \varphi^*$  جواب بهینه مدل با  $(\lambda_{1j}^*, \lambda_{2j}^*, \theta^*, \varphi^*)$  و  $\theta, \varphi$  یک جواب موجه برای مدل با  $(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \theta, \varphi)$  (جواب شدنی ۱) باشد.  $(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \theta, \varphi^*)$  یک جواب شدنی (جواب شدنی ۲) برای مدل است (سه محدودیت اول همان سه محدودیت اولی جواب شدنی ۱ و سه محدودیت دوم همان سه محدودیت دوم جواب بهینه فرض خلف است) که مقدار تابع هدف این جواب شدنی بزرگ‌تر از جواب بهینه فرض خلف است (چون  $\theta^* > \theta$ ):

$$\varphi^* - \theta^* < \varphi - \theta$$

بنابراین حالت ۳، باطل است.

با رد ۳ حالت فرض خلف، قضیه ۵ تأیید می‌شود؛ یعنی در جواب بهینه نه تنها تابع هدف نسبت به هر جواب دیگری بهتر است، بلکه نسبت افزایش خروجی‌های مرحله ۲ کمتر از یک جواب غیربهینه و نسبت کاهش ورودی‌های مرحله اول بیشتر از یک جواب غیربهینه نیستند و مدل هم‌زمان شبکه و تک‌تک مراحل را بهبود می‌دهد و کارا می‌کند؛ یعنی اگر مرحله ۱ به تنهایی و مستقل از شبکه کارا می‌شد، همان  $\theta$  را می‌داد که مدل ۱، می‌دهد و اگر مرحله ۲ کارا می‌شد، همان  $\varphi$  را می‌داد که مدل ۱، می‌دهد؛ بنابراین مدل هم‌زمان هر دو مرحله را کارا می‌کند و کاراشدن یک مرحله در تضاد و ناسازگار با کاراشدن مرحله دیگری نخواهد بود؛ همچنین نشان می‌دهد که نمرات ارزیابی دو مرحله منصفانه و مبتنی بر عملکرد همان مرحله است و عملکرد ضعیف یک مرحله روی نمره کارایی مرحله دیگر اثر ندارد.

**قضیه ۵: تصویر (الگوی) یک واحد ناکارا، کارا است.**

اگر به جای واحد تحت ارزیابی با  $(X, L, Z, E, Y)$ ، تصویر آن، یعنی  $(\theta^* X, L, Z, E, \varphi^* Y)$  در مدل ۱، قرار داده شود، یعنی تصویر ارزیابی شود، سمت راست محدودیت‌ها می‌شود:

$$\theta \theta^*$$

$$\varphi \varphi^*$$

و از تغییر متغیر زیر استفاده شود:

$$\bar{\theta} = \theta \theta^*$$

$$\bar{\varphi} = \varphi \varphi^*$$

نکته ۱: بر اساس قضیه ۲، در جواب بهینه،  $\theta \leq 1$ ،  $\varphi \geq 1$  است.

نکته ۲: بر اساس قضیه ۵،  $\bar{\theta} \geq \bar{\varphi}$  و  $\theta^* \leq \bar{\theta}$  است؛ چون بهینه هستند.

با توجه به دو نکته ذکر شده تنها در صورتی روابط بالا برقرار هستند که  $\theta = 1$  و  $\varphi = 1$  باشند؛ یعنی تصویر کارا است و این تصویر هم در مراحل و هم کل شبکه روی مرز کارایی قرار دارد؛ همچنین از این قضیه اثبات می‌شود که اگر واحدی در هر دو مرحله کارا  $(\theta^* = 1, \varphi^* = 1)$  باشد، واحد دیگری پیدا نمی‌شود که بر آن غلبه کند.



مدل ۱، در شرایط بازده به مقیاس ثابت (CRS) است، اگر دو محدودیت  $\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} = 1$  و  $\sum_{j=1}^n \lambda_{2j} = 1$  به آن اضافه شود مدل با شرایط بازده به مقیاس متغیر (VRS) می‌شود و تمامی خواص گفته‌شده را نیز دارد.

**مدل غیرشعاعی پیشنهادی.** مدل ۱، از نوع شعاعی است. در مدل‌های شعاعی مقدار همه ورودی‌ها یا خروجی‌ها به یک نسبت کاهش یا افزایش می‌یابند؛ درحالی‌که در مسائل واقعی پیرامون ما، برخورد با تمام ورودی‌ها (یا خروجی‌ها) یکسان نیست. مدل‌های شعاعی باعث صفربودن تمامی مازادها می‌شوند و در نتیجه به بیشتر نشان دادن نمرات کارایی منجر خواهند شد [۱۰]؛ بنابراین برای غلبه بر این مشکلات می‌توان از مدل‌های غیرشعاعی استفاده کرد. مدل ۲، حالت غیرشعاعی مدل پیشنهادی پژوهش است که امکان کاهش هر یک از ورودی‌ها و افزایش هر یک از خروجی‌ها به نسبت متفاوت را می‌دهد.

رابطه (۳)

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \varphi_r - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \theta_i \\ & \text{s.t.} \\ & (1) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} X_{ij} \leq \theta_i X_{io} \quad i = 1, \dots, I \\ & (2) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} L_{hj} \geq L_{ho} \quad h = 1, \dots, H \\ & (3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} Z_{mj} \geq Z_{mo} \quad m = 1, \dots, M \\ & (4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} Z_{mj} \leq Z_{mo} \quad m = 1, \dots, M \\ & (5) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} E_{fj} \leq E_{fo} \quad f = 1, \dots, F \\ & (6) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} Y_{rj} \geq \varphi_r Y_{ro} \quad r = 1, \dots, R \\ & (7) \quad \varphi_r \geq 1 \quad r = 1, \dots, R \\ & (8) \quad \theta_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

$$\lambda_{1j}, \lambda_{2j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\varphi, \theta \text{ free}$$

تابع هدف ترکیب عوامل انقباض ورودی ( $\theta_i$ ) و عوامل انبساط خروجی ( $\varphi_r$ ) است. همانند رویکرد مدل شعاعی، مرحله اول به صورت ورودی محور و مرحله دوم به صورت خروجی محور کارا می‌شود؛ اما نسبت کاهش هر ورودی مرحله اول با ورودی دیگر و نسبت افزایش هر خروجی مرحله دوم با خروجی دیگر متفاوت است. با حل مدل و تعیین مقادیر بهینه متغیرها، کارایی مراحل و کارایی کل (شبکه) به صورت زیر محاسبه می‌شود. کارایی غیرشعاعی مرحله اول:

$$\sqrt[i]{\prod_{i=1}^I \theta_i}$$

این رابطه، میانگین هندسی نسبت کاهش ورودی‌های مرحله اول است. کارایی غیرشعاعی مرحله دوم:

$$\sqrt[R]{\prod_{r=1}^R \varphi_r}$$

و کارایی کل یا شبکه‌ای:

$$\sqrt[i]{\prod_{i=1}^I \theta_i} \times \sqrt[R]{\prod_{r=1}^R \varphi_r}$$

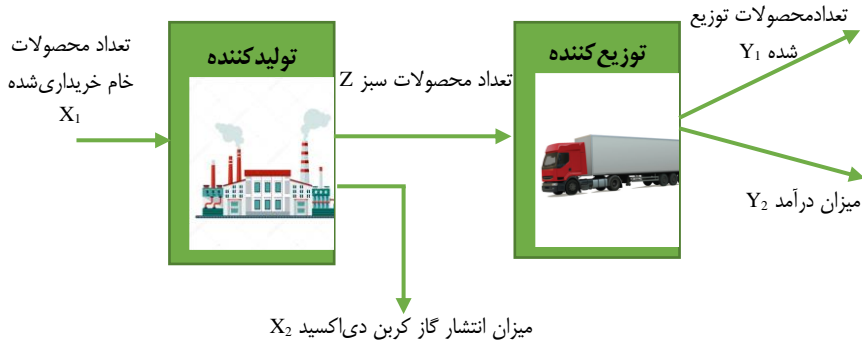
به عبارت دیگر میانگین هندسی کارایی دومرحله است. مدل غیرشعاعی همان خواص مدل شعاعی را دارد که به دلیل مشابه بودن از بیان اثبات آن‌ها خودداری می‌شود. نتایج نمرات کارایی مدل غیرشعاعی قطعاً کمتر از مدل شعاعی می‌شود و بنابراین تمایز بیشتری بین واحدها ایجاد می‌کند. مدل شعاعی تنها قادر به تفکیک واحدها و مراحل آن‌ها به کارا و ناکارا است؛ اما مدل غیرشعاعی واحدها و مراحل را به کارای قوی، کارای ضعیف و ناکارا تقسیم می‌کند.

تعریف ۳: یک مرحله کارای قوی است؛ اگر مقدار کارایی غیرشعاعی شبکه‌ای آن مرحله ۱ شود. تعریف ۴: یک DMU کارای قوی است؛ اگر کارایی شبکه‌ای غیرشعاعی آن ۱ شود (تابع هدف مدل ۲، صفر شود). یک واحد تنها در صورتی کارای قوی می‌شود که در هر دو مرحله کارای قوی باشد.

تعریف ۵: یک واحد (یا مرحله) کارای ضعیف شبکه‌ای است؛ اگر کارایی شعاعی آن ۱ ولی کارایی غیرشعاعی آن، ۱ نشود.

اگر به مدل ۲، دو محدودیت  $\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} = 1$  و  $\sum_{j=1}^n \lambda_{2j} = 1$  اضافه شود مدل با شرایط بازده به مقیاس متغیر می‌شود.

**مطالعه کاربردی.** پس از ارائه مدل‌ها از آن‌ها برای ارزیابی پایداری زنجیره‌های تأمین دومرحله‌ای به‌عنوان یک مثال عددی استفاده شد. بدین منظور از داده‌های پژوهش بدیع‌زاده و همکاران (۲۰۱۷)، با عنوان «ارزیابی پایداری زنجیره‌های تأمین با استفاده از DEA شبکه-ای» بهره‌گیریشد [۳]. مطالعه کاربردی آن‌ها زنجیره تأمین ۹ کارخانه تولیدکننده رب گوجه‌فرنگی است. شکل ۳، ساختار زنجیره تأمین مورد مطالعه را نشان می‌دهد.



شکل ۳. ساختار زنجیره تأمین مطالعه کاربردی

در این ساختار  $X_2$  که خروجی نامطلوب مرحله اول است، به‌عنوان ورودی مرحله اول در نظر گرفته شد. مقادیر هر یک از متغیرهای مربوط به زنجیره‌های تأمین نه‌گانه در جدول ۲، آورده شده است.

جدول ۲. داده‌های مربوط به زنجیره‌های تأمین

واحد	$X_1$	$X_2$	Z	$Y_1$	$Y_2$ (۱۰۰۰ ریال)
۱	۳۲۰	۱۷۰	۳۱۵	۱۵۰۰	۱۱۰۰
۲	۲۹۵	۱۶۵	۲۹۰	۲۰۰۰	۱۲۸۰
۳	۲۹۰	۱۶۳	۲۸۲	۲۲۰۰	۹۸۰
۴	۳۱۰	۱۷۵	۳۱۲	۲۷۰۰	۱۲۰۰
۵	۲۸۰	۱۹۲	۲۷۰	۱۹۰۰	۸۴۰
۶	۲۱۰	۱۵۰	۲۰۰	۱۸۹۰	۹۶۵
۷	۲۳۵	۱۵۵	۲۲۰	۱۹۹۵	۱۱۱۵
۸	۲۵۵	۱۳۷	۲۳۵	۱۶۵۰	۷۰۰
۹	۳۱۵	۱۲۲	۳۱۸	۳۰۰۰	۱۴۰۰

#### ۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

جدول ۳، نتایج تحلیل داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار لینگو و بر اساس مدل شعاعی پیشنهادی پژوهش در دو شرایط بازده به مقیاس ثابت (CRS) و بازده به مقیاس متغیر (VRS) را نشان می‌دهد. در حالت CRS هیچ واحدی کارایی کل نیست؛ چراکه هیچ واحدی هم‌زمان در هر دو مرحله کارا نیست. واحد ۹ در مرحله اول و واحدهای ۶ و ۷ در مرحله دوم کارا هستند. در حالت VRS واحد ۶ و ۹ در هر دو مرحله کارا و بنابراین کارایی کل هستند.

جدول ۳. کارایی شعاعی مراحل و کل

واحد	شرایط VRS			شرایط CRS		
	کارایی کل	کارایی توزیع‌کننده	کارایی زنجیره	کارایی کل	کارایی توزیع‌کننده	کارایی زنجیره
۱	۰/۹۷۵۱	۰/۶۸۹۰	۰/۸۱۹۷	۰/۹۷۶۰	۰/۷۹۰۷	۰/۸۷۸۵
۲	۰/۹۷۳۸	۰/۸۷۰۹	۰/۹۲۰۹	۰/۹۸۳۳	۰/۹۷۰۸	۰/۹۷۷۰
۳	۰/۹۶۳۲	۰/۸۲۵۵	۰/۸۹۱۷	۰/۹۷۵۷	۰/۸۲۶۷	۰/۸۹۸۱
۴	۰/۹۹۷۰	۰/۹۱۵۸	۰/۹۵۵۵	۰/۹۹۸۹	۰/۹۱۷۳	۰/۹۵۷۲
۵	۰/۹۵۵۲	۰/۷۴۴۷	۰/۸۴۳۴	۰/۹۷۲۴	۰/۷۴۵۵	۰/۸۵۱۴
۶	۰/۹۴۳۴	۱	۰/۹۷۱۳	۱	۱	۱
۷	۰/۹۲۷۳	۱	۰/۹۶۳۰	۰/۹۶۹۳	۱	۰/۹۸۴۵
۸	۰/۹۱۲۹	۰/۷۴۳۰	۰/۸۲۳۶	۱	۰/۷۴۳۵	۰/۸۶۲۳
۹	۱	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۹۱	۱	۱	۱

جدول ۴، نتایج تحلیل داده‌ها با مدل غیرشعاعی پژوهش را نشان می‌دهد. در حالت CRS تولیدکننده زنجیره تأمین ۹ و توزیع‌کننده ۶ و ۷، کارا و مابقی ناکارا هستند. در حالت VRS تولیدکننده ۶، ۸ و ۹ و توزیع‌کننده ۶، ۷ و ۹ کارا شدند.

جدول ۴. کارایی غیرشعاعی مراحل و کل

واحد	شرایط CRS			شرایط VRS		
	کارایی تولیدکننده	کارایی توزیع کننده	کارایی کل	کارایی تولیدکننده	کارایی توزیع کننده	کارایی کل
۱	۰/۸۳۳۶	۰/۶۰۳۹	۰/۷۰۹۱	۰/۸۳۹۳	۰/۶۳۳۰	۰/۷۲۸۳
۲	۰/۸۱۰۳	۰/۸۱۷۰	۰/۸۱۳۶	۰/۸۷۵۵	۰/۸۴۶۶	۰/۸۶۰۹
۳	۰/۷۹۹۵	۰/۷۶۸۰	۰/۷۸۳۶	۰/۸۱۳۹	۰/۷۹۵۴	۰/۸۳۸۵
۴	۰/۸۲۵۸	۰/۸۵۱۰	۰/۸۲۸۳	۰/۸۳۹۳	۰/۸۹۳۱	۰/۸۶۵۸
۵	۰/۷۱۷۹	۰/۶۹۰۲	۰/۷۰۳۹	۰/۸۲۱۹	۰/۷۱۰۶	۰/۷۶۴۲
۶	۰/۶۹۴۷	۱	۰/۸۳۳۵	۱	۱	۱
۷	۰/۷۱۰۶	۱	۰/۸۴۳۰	۰/۹۵۳۱	۱	۰/۹۷۶۳
۸	۰/۷۷۵۱	۰/۶۷۴۶	۰/۷۲۳۱	۱	۰/۶۸۱۱	۰/۸۲۵۳
۹	۱	۰/۹۵۴۲	۰/۹۷۶۸	۱	۱	۱

**مرز کارایی و تصویر واحدهای ناکارا.** مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر مرز کارایی برای واحدهای ناکارا الگو و مقدار بهینه متغیرها برای کارآمد شدن را مشخص می‌کنند. در مدل‌های دومرحله‌ای یکی از موارد مورد بحث ترسیم مرز کارایی و تعیین مقدار بهینه متغیرها و ارائه الگو است. در تمامی مدل‌های پیشنهادی پژوهش علاوه بر محاسبه کارایی، برای واحدهای ناکارا مقدار بهینه متغیرها نیز مشخص می‌شود.  $\theta$  نسبت کاهش ورودی‌های مرحله اول و  $\phi$  نسبت افزایش خروجی‌های مرحله دوم برای رسیدن به مرز کارایی را نشان می‌دهد. برای مثال، مقدار  $\theta$  برای واحد دوم در مدل شعاعی حالت CRS (مدل ۱)،  $0/9738$  شده است؛ بنابراین این واحد باید ورودی‌های مرحله اول خود را به  $97/38$  درصد مقدار فعلی برساند. ورودی اول این واحد  $295$  است که برای رسیدن به مرز کارایی باید آن را به  $287$  برساند. ورودی دوم این واحد نیز  $165$  است که باید آن را به  $161$  برساند. به عبارت دیگر با این میزان ورودی‌ها هم می‌تواند همان مقدار خروجی ( $Z=290$ ) را برای مرحله اول داشته باشد. مقدار  $\phi$  برای همین واحد  $1/1483$  شده است؛ یعنی این واحد برای رسیدن به مرز کارایی باید خروجی‌های مرحله دوم خود را  $1/1483$  برابر کند. مقدار فعلی خروجی‌های مرحله دوم این واحد به ترتیب  $2000$  و  $1280$  است که باید به  $2297$  و  $1470$  برسد تا مرحله دوم کارا شود. به عبارت دیگر ترکیب محدبی از سایر واحدها در مرحله دوم وجود دارد که با همان میزان ورودی ( $Z=290$ ) توانسته است خروجی‌های بیشتری (حداقل  $1/1483$  برابر فعلی) داشته باشد؛ بنابراین تصویر (الگوی) واحد دوم با  $(295, 165, 290, 2000, 1280)$  ورودی، میانی و خروجی،  $(287, 161, 290, 2297, 1470)$  تحت شرایط CRS است. جدول ۵، مقدار بهینه متغیرها برای واحدها را به ترتیب تحت شرایط CRS و VRS و با فرض حرکت شعاعی نشان می‌دهد.

جدول ۵. مقدار بهینه متغیرهای هر واحد در حالت شعاعی

شرایط VRS					شرایط CRS					واحد
$y_2^*$	$y_1^*$	$Z^*$	$x_2^*$	$x_1^*$	$y_2^*$	$y_1^*$	$Z^*$	$x_2^*$	$x_1^*$	
۱۳۹۱	۱۸۹۷	۳۱۵	۱۶۶	۳۱۳	۱۵۹۶	۲۱۷۷	۳۱۵	۱۶۶	۳۱۲	۱
۱۳۱۸	۲۰۶۰	۲۹۰	۱۶۲	۲۹۰	۱۴۷۰	۲۲۹۷	۲۹۰	۱۶۱	۲۸۷	۲
۱۱۸۶	۲۶۶۱	۲۸۲	۱۵۹	۲۸۳	۱۱۸۷	۲۶۶۵	۲۸۲	۱۵۷	۲۷۹	۳
۱۳۰۸	۲۹۴۳	۳۱۲	۱۷۴	۳۰۹	۱۳۱۰	۲۹۴۸	۳۱۲	۱۷۴	۳۰۹	۴
۱۱۲۶	۲۵۴۸	۲۷۰	۱۸۶	۲۷۲	۱۱۲۸	۲۵۵۲	۲۷۰	۱۸۳	۲۶۷	۵
۹۶۵	۱۸۹۰	۲۰۰	۱۵۰	۲۱۰	۹۶۵	۱۸۹۰	۲۰۰	۱۴۲	۱۹۸	۶
۱۱۱۵	۱۹۹۵	۲۲۰	۱۵۰	۲۲۸	۱۱۱۵	۱۹۹۵	۲۲۰	۱۴۴	۲۱۸	۷
۹۴۱	۲۲۱۹	۲۳۵	۱۳۷	۲۵۵	۹۴۲	۲۲۲۱	۲۳۵	۱۲۵	۲۳۳	۸
۱۴۰۰	۳۰۰۰	۳۱۸	۱۲۲	۳۱۵	۱۴۰۲	۳۰۰۵	۳۱۸	۱۲۲	۳۱۵	۹

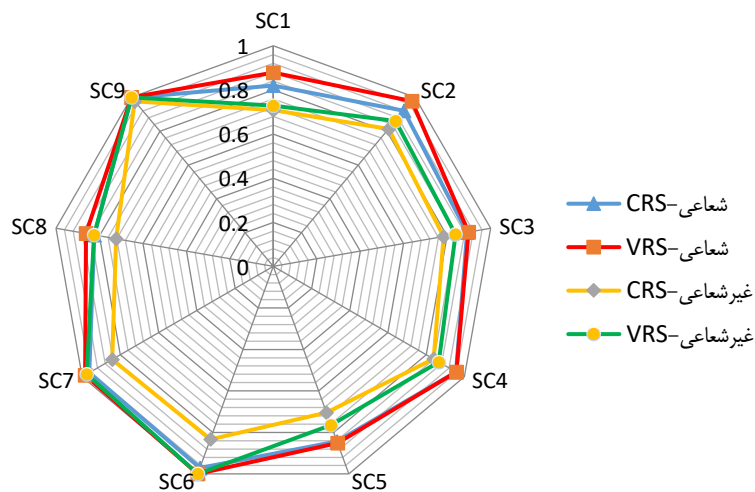
اگر نسبت کاهش هر ورودی و نسبت افزایش هر خروجی متفاوت باشد و امکان حرکت غیرشعاعی به سمت مرز کارایی باشد، الگو متفاوت می‌شود.  $\theta_1$  و  $\theta_2$  که نمایانگر نسبت کاهش ورودی اول و دوم مرحله اول هستند، برای واحد دوم به ترتیب  $۰/۹۷۳۸$  و  $۰/۶۷۴۳$  به دست آمده است؛ یعنی ورودی اول این واحد باید به  $۹۷/۳۸$  درصد مقدار فعلی و ورودی دوم به  $۶۷/۴۳$  درصد مقدار فعلی برسد؛ بنابراین ورودی اول و دوم که به ترتیب  $۲۹۵$  و  $۱۶۵$  هستند، برای رسیدن به کارایی باید به  $۲۸۷$  و  $۱۱۱$  برسد. مقدار بهینه  $\phi_1$  و  $\phi_2$  در مدل غیرشعاعی برای واحد دوم به ترتیب  $۱/۳۷۰۳$  و  $۱/۰۹۳۲$  شده است؛ بنابراین خروجی‌های مرحله دوم از  $۲۰۰۰$  و  $۱۲۸۰$  باید به  $۲۷۴۱$  و  $۱۳۹۹$  برسد؛ از این رو الگوی واحد دوم با  $(۲۹۵، ۱۶۵، ۲۹۰، ۲۰۰۰، ۱۲۸۰)$  ورودی، میانی و خروجی واحدی با  $(۲۸۷، ۱۱۱، ۲۹۰، ۲۷۴۱، ۱۳۹۹)$  روی مرز کارایی CRS و حرکت غیرشعاعی است. جدول ۶ تصویر واحدها را روی مرز کارایی تحت شرایط CRS و VRS با فرض حرکت غیرشعاعی نشان می‌دهد.

جدول ۶. مقدار بهینه متغیرهای هر واحد در حالت غیرشعاعی

شرایط VRS					شرایط CRS					واحد
$y_2^*$	$y_1^*$	$Z^*$	$x_2^*$	$x_1^*$	$y_2^*$	$y_1^*$	$Z^*$	$x_2^*$	$x_1^*$	
۱۳۹۱	۲۹۶۲	۳۱۵	۱۲۳	۳۱۳	۱۵۲۰	۲۹۷۷	۳۱۵	۱۲۱	۳۱۲	۱
۱۳۱۸	۲۷۱۳	۲۹۰	۱۲۹	۲۹۰	۱۳۹۹	۲۷۴۱	۲۹۰	۱۱۱	۲۸۷	۲
۱۲۹۵	۲۶۳۰	۲۸۲	۱۳۱	۲۸۳	۱۴۲۹	۲۵۵۷	۲۸۲	۱۰۸	۲۷۹	۳
۱۳۸۳	۲۹۳۸	۳۱۲	۱۲۳	۳۱۰	۱۵۸۱	۲۸۲۹	۳۱۲	۱۲۰	۳۰۹	۴
۱۲۶۰	۲۵۰۸	۲۷۰	۱۳۳	۲۷۲	۱۳۶۸	۲۴۴۸	۲۷۰	۱۰۴	۲۶۷	۵
۹۶۵	۱۸۹۰	۲۰۰	۱۵۰	۲۱۰	۹۶۵	۱۸۹۰	۲۰۰	۷۷	۱۹۸	۶
۱۱۱۵	۱۹۹۵	۲۲۰	۱۴۵	۲۲۸	۱۱۱۵	۱۹۹۵	۲۲۰	۸۴	۲۱۸	۷
۱۱۵۹	۲۱۴۹	۲۳۵	۱۳۷	۲۵۵	۱۱۹۱	۲۱۳۱	۲۳۵	۹۰	۲۳۳	۸
۱۴۰۰	۳۰۰۰	۳۱۸	۱۲۲	۳۱۵	۱۵۳۸	۳۰۰۰	۳۱۸	۱۲۲	۳۱۵	۹

### ۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

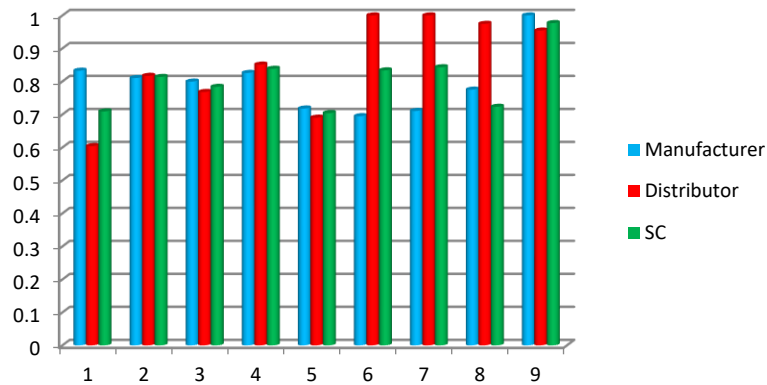
در این پژوهش برای ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای متوالی مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی تحت هر دو شرایط بازده به مقیاس ثابت و متغیر ارائه شد. در این مدل‌ها با حفظ متغیرهای میانی در سطح فعلی، مرحله اول ورودی‌محور و مرحله دوم خروجی‌محور کارا می‌شوند. شکل ۴، نمودار رادار کارایی واحدها در شرایط مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۴. نمودار رادار کارایی واحدها

همان‌طور که مشخص است نمرات کارایی همه زنجیره‌های تأمین در مدل غیرشعاعی نسبت به مدل شعاعی کمتر است. دلیل آن امکان انبساط و انقباض خروجی‌ها و ورودی‌ها به نسبت

متفاوت در حالت غیرشعاعی است؛ همچنین در هر دو حالت شعاعی و غیرشعاعی نمرات کارایی بازده به مقیاس ثابت کمتر از بازده به مقیاس متغیر است که دلیل آن عدم وجود اصل بی‌کرانی اشعه در شرایط VRS و در نتیجه کوچک‌تر بودن مجموع امکان تولید و نزدیک‌تر بودن واحدها نسبت به مرز کارایی است. در شرایط CRS هیچ واحدی کارا نشده و در شرایط VRS واحدهای ۶ و ۹ هم در حالت شعاعی و هم غیرشعاعی کارا شده‌اند؛ بنابراین کارای قوی هستند. شکل ۵، وضعیت کارایی مراحل و کل را برای واحدها در حالت غیرشعاعی و شرایط CRS نشان می‌دهد.



شکل ۵. کارایی مراحل و کل در حالت غیرشعاعی و شرایط CRS

با توجه به نمودار شکل ۵، برای هر زنجیره منبع عدم کارایی و میزان تأثیرگذاری هر مرحله در نمره کارایی کل مشخص است. برای مثال، در واحد اول کارایی توزیع‌کننده کمتر و کارایی تولیدکننده بیشتر از کارایی کل است؛ بنابراین در این واحد عملکرد توزیع‌کننده تأثیر بیشتری بر عدم کارایی کل زنجیره داشته و نیازمند توجه بیشتری برای بهبود است. در واحدهای ۶، ۷ و ۹ عملکرد توزیع‌کننده نسبت به تولیدکننده به صورت معناداری بهتر است و بنابراین در این واحدها مرحله اول تأثیر بیشتری بر عدم کارایی داشته است. در سایر واحدها تفاوت عملکرد دو مرحله محسوس نیست. به‌طور کلی میانگین نمره کارایی تولیدکننده‌ها ۰/۷۹۶۳، توزیع‌کننده‌ها ۰/۸۵۱۰ و کل زنجیره ۰/۸۰۲۸ شده است که نشان‌دهنده وضعیت عملکردی بهتر توزیع‌کننده‌ها به نسبت تولیدکننده‌ها است؛ بنابراین نتایج مطالعه حاضر می‌تواند بینش عمیقی را برای مدیران به‌منظور بهبود پایداری زنجیره تأمین فراهم کند.

در بسیاری از مدل‌های موجود از جمله مدل‌های کاتو (۲۰۱۶)، گوان و چن (۲۰۱۲)، غریب و همکاران (۱۳۹۸)، ترابنده و همکاران (۱۴۰۰)، تساپلس و همکاران<sup>۱</sup> (۲۰۱۹) و هالکوس و

1. Tsaples, et al.



آرگیروپولو (۲۰۲۱)، مرز کارایی برای واحدها تعیین نشده است و مقدار بهینه متغیرها مشخص نیست [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۲۱، ۳۴، ۳۶]. آن‌ها صرفاً به ارائه مدل مضربی برای محاسبه کارایی‌ها بدون توجه به مرز کارایی پرداخته‌اند (مانند مدل‌های فرم نسبت). در مدل‌های تن و تسوتسوی (۲۰۰۹، ۲۰۱۴)، کائو (۲۰۱۸)، سلیمانی دامنه و همکاران (۱۳۹۶) و حسن زاده و مصطفایی (۲۰۱۹)، مقدار بهینه متغیرهای میانی توسط یکی از دومرحله تعیین می‌شود [۱۶، ۲۲، ۳۰، ۳۲، ۳۳]. برای مثال، مقدار بهینه متغیر میانی واحد اول در رویکرد خروجی محور کائو (۲۰۱۸) ۳۲۳، ورودی محور تن و تسوتسوی (۲۰۱۴) ۲۱۷ و حسن زاده و مصطفایی (۲۰۱۹) ۳۲۴ به دست می‌آید که بیشتر یا کمتر از مقدار فعلی (۳۱۵) است. این امر به ارزیابی اشتباه و محاسبه غیرمنصفانه کارایی‌ها منجر می‌شود. برای مثال، کارایی مرحله دوم در مدل کائو (۲۰۱۸) با ورودی ۳۲۳ محاسبه می‌شود؛ درحالی‌که باید با مقدار ۳۱۵ ارزیابی شود؛ یعنی باید بررسی شود مرحله دوم با ۳۱۵ ورودی (نه ۳۲۳) چه میزان خروجی با توجه به مجموعه امکان تولید می‌توانسته تولید کند. در رویکرد ورودی محور تن و تسوتسوی (۲۰۱۴)، مقدار بهینه ورودی‌های مرحله نخست برای تولید ۲۱۷ خروجی محاسبه می‌شود و کارایی مرحله اول با توجه به این ورودی‌های بهینه به دست می‌آید؛ درحالی‌که این مرحله برای تولید ۳۱۵ خروجی (نه ۲۱۷)، ورودی‌ها را استفاده کرده است. به‌طور کلی اگر مقدار بهینه متغیرهای میانی توسط مرحله اول تعیین شود، مقدار آن تا حد امکان افزایش داده می‌شود و سپس کارایی مرحله دوم با توجه به این مقدار بهینه متغیر میانی تعیین می‌شود. در این صورت نمره کارایی مرحله دوم دارای خطا و غیرعادلانه است و ضعف عملکرد مرحله اول باعث محاسبه کارایی کمتر برای مرحله دوم می‌شود. اگر مقدار متغیر میانی توسط مرحله دوم تعیین شود، مرحله اول با مقدار بهینه متغیر میانی (خروجی مرحله اول) ارزیابی و تحلیل می‌شود؛ بنابراین در اینجا ضعف عملکرد مرحله دوم باعث کاهش کارایی مرحله اول می‌شود. علاوه بر محاسبه اشتباه کارایی مراحل در مدل‌های یادشده، حرکت یک مرحله به سمت الگو وابسته به مرحله دیگر است. برای مثال، مرحله دوم برای بهینه‌کردن خروجی‌های خود باید منتظر بهینه‌شدن ورودی‌هایش (میانی‌ها) توسط مرحله اول باشد. در این پژوهش با رویکردی عادلانه به تعیین مقدار بهینه متغیرها، ارزیابی کارایی دومرحله و ترسیم مرز کارایی پرداخته شد؛ همچنین اثبات شد که الگوی واحدهای ناکارا هم در مراحل و هم کل ساختار روی مرز کارایی قرار دارد و کارایی و الگوی یک مرحله وابسته به دیگری نیست.

در پژوهش حاضر تنها عدم وجود اصل بی‌کرانی اشعه (بازده به مقیاس) بررسی شده است. ارائه مدل‌ها با این رویکرد در شرایط عدم وجود اصل تحدب (مدل‌های  $FDH^1$ ) یا شرایط مختلف اصل امکان‌پذیری می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد. مدل‌های پژوهش در فرم پوششی ارائه شدند،

پیشنهاد می‌شود در پژوهشی ثانویه این مدل‌ها در فرم مضربی ارائه و خواص آن‌ها بررسی شود. با توجه به اینکه در برخی کاربردها ساختار مورد مطالعه ممکن است چندمرحله‌ای متوالی، موازی یا ترکیبی باشد، تعمیم مدل به این ساختارها می‌تواند بررسی شود. کاربرد مدل‌های پژوهش محدود به زنجیره تأمین نیست و می‌توان در پژوهش‌های آتی از آن‌ها برای بررسی سایر کاربردها مانند ارزیابی مؤسسه‌های مالی، فرایند نوآوری، بیمارستان‌ها، شرکت‌های بیمه، هتل‌ها، نیروگاه‌ها، دانشگاه‌ها، فرودگاه‌ها و سایر موارد استفاده کرد.

**تعارض منافع.** برای ارائه مطالب و نگارش این مقاله هیچ‌گونه کمک مالی از هیچ فرد، نهاد و سازمانی دریافت نشده است و نتایج و دستاوردهای این مقاله به نفع یا ضرر سازمان یا فردی خاص نخواهد بود. حضور نویسندگان در این پژوهش به عنوان شاهدی بی‌طرف ولی متخصص بوده است و نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منافی ندارند.

### منابع

1. An, Q., Chen, H., Xiong, B., Wu, J., Liang, L. (2017). Target intermediate products setting in a two-stage system with fairness concern. *Omega*, 73, 49–59.
2. Avkiran, N., Mccrystal, A. (2014). Dynamic network range-adjusted measure vs. dynamic network slacks-based measure. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 57(1), 1-14.
3. Badiezadeh, T., Farzipoor, R. & Samavati, T. (2017). Assessing sustainability of supply chains by double frontier network DEA: A big data approach, *Computers and Operations Research*, 98, 284-290.
4. Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units; *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
5. Chen, Y., Cook, W. D., Kao, C. & Zhu, J. (2013). Network DEA Pitfalls: Divisional Efficiency and Frontier Projection under general network structures, *European Journal of Operational Research*, 226, 507-515.
6. Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European Journal of Operational Research*, 196, 1170-1176.
7. Cook, W. D., Zhu, J., Bi, G. B., & Yang, F. (2010). Network DEA: Additive efficiency decomposition. *European Journal of Operational Research*, 207, 1122-1129.
8. Cook, W. D., Liang, L. & Zhu, J. (2010). Measuring performance of two-stage network structures by DEA: A review and future perspective. *Omega*, 38, 423-430.
9. Farrell, M. J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of Royal Statistical Society*, 120(3), 81-115.
10. Flegl, M., Bandala, C., Juarez, I., Matus, E. (2022). Analysis of production and investment efficiency in the Mexican food industry: Application of two-stage DEA. *Czech Journal of Food Sciences*, 40, 109-117.
11. Fukuyama, H., & Weber, W.L. (2010). A slacks-based inefficiency measure for a two stage system with bad outputs. *Omega*, 38, 398-409.
12. Gharib, A., Azar, A., Moghbel, A., Dehghan, M. (2019). Designing Organizational Innovation Measuring Model with Dynamic Network DEA (Case Study: Iranian First

- Level Universities). *The journal of Industrial Management Perspective*, 9(33), 9-29. (In Persian)
13. Guan, J. & Chen, K. (2012). Modeling the relative efficiency of national innovation systems. *Research Policy*, 41, 102-115.
  14. Halkos, G., Argyropoulou, G. (2021). Modeling energy and air pollution health damaging: a two-stage DEA approach. *Air Quality, Atmosphere & Health*, 14, 1221-1231.
  15. Halkos, G.E., Tzeremes, N.G., & Kourtzidis, S. A. (2014). A unified classification of two-stage DEA models. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 19(1), 1-16.
  16. Hassanzadeh, A. & Mostafaei, A. (2019). Measuring the efficiency of network structures: Link control approach. *Computers & Industrial Engineering*, 128, 437-446.
  17. Kahi, V. S., Yousefi, S., Shabanpour, H., & Farzipoor, R. (2017). How to evaluate sustainability of supply chains? A dynamic network DEA approach. *Industrial Management & Data Systems*, 117, 9, 1866-1869.
  18. Kao, C. (2009). Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model. *European Journal of Operational Research*, 192, 949-962.
  19. Kao, C. (2014a). Efficiency decomposition for general multi-stage systems in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 232, 117-124.
  20. Kao, C. (2014b). Network data envelopment analysis: A review. *European Journal of Operational Research*, 239(1), 1-16.
  21. Kao, C. (2016). Efficiency decomposition and aggregation in network data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 231, 1-9.
  22. Kao, C. (2018). A classification of slacks-based efficiency measures in network data envelopment analysis with an analysis of the properties possessed. *European Journal of Operational Research*, 270 (3), 1109-1121.
  23. Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185, 418-429.
  24. Kao, C., & Hwang, S. N. (2010). Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance. *Decision Support Systems*, 48, 437-446.
  25. Kao, C., & Hwang, S. N. (2011). Decomposition of technical and scale efficiencies in two-stage production systems. *European Journal of Operational Research*, 211, 515-519.
  26. Koronakos, G. (2019). A Taxonomy and Review of the Network Data Envelopment Analysis Literature. *Machine Learning Paradigms, Learning and Analytics in Intelligent Systems*, 1, 255-311.
  27. Li, H., Xiong, J., Xie, J., Zhou Z. & Zhang, J. (2019). A Unified Approach to Efficiency Decomposition for a Two-Stage Network DEA Model with Application of Performance Evaluation in Banks and Sustainable Product Design. *Sustainability*, 11, 4401.
  28. Moghaddas, Z., Tosarkani, B. M. & Yousefi, S. (2022). A Developed Data Envelopment Analysis Model for Efficient Sustainable Supply Chain Network Design. *Sustainability*, 14(1), 262. <https://doi.org/10.3390/su14010262>.
  29. Moutinho, V. & Madaleno, M. (2021). A Two-stage DEA Model to Evaluate the Technical Eco-Efficiency Indicator in the EU Countries. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 18, 3038.
  30. Soleymani-Damaneh, R., Momeni, M., Mostafaei, A. & Rostami, M. (2017). Developing of a Dynamic Network Data Envelopment Analysis Model for

- Performance Evaluating Banking Sector. *The journal of Industrial Management Perspective*, 7(1), 67-89. (In Persian)
31. Su, Y. & Sun, W. (2018). Sustainability evaluation of the supply chain with undesired outputs and dual-role factors based on double frontier network DEA. *Soft Computing*, 22, 5525-5533.
  32. Tone, K., & Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, 197, 243-252.
  33. Tone, T., & Tsutsui, M. (2014). Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach. *Omega*, 42, 124-131.
  34. Torabandeh, M. A., Dorri, B., Motameni, A., & Rabieh, M. (2021). Comparative-fuzzy Analysis of National Innovation Capability Based on Results of Dynamic Network DEA Model. *The journal of Industrial Management Perspective*, 11(42), 207-246. (In Persian)
  35. Tsai, M. C., Cheng, C. H., Nguyen, V. T., & Tsai, M. I. (2020). The Theoretical Relationship between the CCR Model and the Two-Stage DEA Model with an Application in the Efficiency Analysis of the Financial Industry. *Symmetry*, 12 (5) ,712. <https://doi.org/10.3390/sym12050712>.
  36. Tsaples, G., Papathanasiou, J., Georgiou, A., & Samaras, N. (2019). Assessing Multidimensional Sustainability of European Countries with a Novel Two-Stage DEA. *Decision Support Systems*, 348, 111-122.
  37. Wang, M., Chen, Y. & Zhou, Z. (2020). A Novel Stochastic Two-Stage DEA Model for Evaluating Industrial Production and Waste Gas Treatment Systems. *Sustainability*, 12, 2316.
  38. Wang, M., Huang, Y. & Li, D. (2021). Assessing the performance of industrial water resource utilization systems in China based on a two-stage DEA approach with game cross efficiency. *Journal of Cleaner Production*, 312, 127722.
  39. Wen, Y., Hu, J., An, Q. & Ang, S. (2022). Cooperative performance evaluation among homogeneous parallel decision making units with coalition structures. *Computers & Industrial Engineering*, 168, <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.10810>.
  40. Wu, J., Xu, G., Zhu, Q., Zhang, C. (2021). Two-stage DEA models with fairness concern: Modelling and computational aspects. *Omega*, 105, 102521.
  41. Zha, Y., Wang, J., Liang, N., & Zhou, C. (2016). Utility-based two-stage models with fairness concern. *Cent Eur J Oper Res*, 24(4), 877-900.
  42. Zhang, J., Wu, Q., & Zhou, Z. (2019). A two-stage DEA model for resource allocation in industrial pollution treatment and its application in China, *Journal of Cleaner Production*, 228, 29-39.
  43. Zhang, L., Zhao, L. & Zha, Y. (2021). Efficiency evaluation of Chinese regional industrial systems using a dynamic two-stage DEA approach. *Socio-Economic Planning Sciences*, 77, 101-131.
  44. Zhao, T., Xie, J., Chen, Y. & Liang, L. (2021). Coordination efficiency in two-stage network DEA: application to a supplier-manufacture sustainable supply chain. *International Journal of Logistics Research and Applications*, 25(3), 1-22.
  45. Zhu, Q., Li, F., Wu, J., & Sun, J. (2020). Cross-efficiency evaluation in data envelopment analysis based on the perspective of fairness utility. *Computer Industrial Engineering*, 151, <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106926>.