



Multi-product, multi-period inventory control optimization based on a hybrid policy of production and procurement, considering demand rates higher or lower than the production rate

Fariba Miraj^{*}
Seyyed Mohammad Hadji Molana^{**}
Seyed Mojtaba Sajadi^{***}
Ali Husseinzadeh Kashan^{****}

Extended Abstract

Introduction and objectives. To develop a comprehensive inventory control system, Economic Order Quantity (EOQ) or Economic Production Quantity (EPQ) models are generally used to reduce costs, prevent delays in orders, and achieve high performance. Economic production and ordering are important topics in production and inventory control and have long attracted researchers' attention. Economical and profitable production requires comprehensive and precise planning for all production stages. In manufacturing companies producing a group of products, customer demand may exceed the production rate in some periods, or the reverse may occur. Under such conditions, the company can satisfy customer demand through production, purchasing, or accepting shortages. Choosing among different product ordering systems is therefore important. Most related studies have proposed methods for determining whether purchasing (ordering) or producing a product is more economical when both options are available. They select either purchasing or production according to the criteria included in their models, such as cost and customer satisfaction.

Methods. This study presents a mathematical optimization model for determining the optimal production and purchasing quantities and the production start time in a multi-product, multi-period system. The model minimizes total cost subject to constraints such as available warehouse space and budget. It considers the possible conditions associated with the presence or absence of shortages and with the demand rate being higher or lower than the production rate, and determines the optimal policy.

Received : Aug. 03, 2025; Revised : Nov. 12, 2025; Accepted : Jun. 13, 2026; Published Online : Jun. 19, 2026.

^{*}Ph.D. Student Department of Industrial Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

^{**}Assistant Professor Department of Industrial Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

^{***}Associate Professor Faculty of Entrepreneurship, University of Tehran, Tehran, Iran.

Corresponding Author : msajadi@ut.ac.ir

^{****}Associate Professor Faculty of Industrial and Systems Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.



Findings. This study presents an integrated production and purchasing model for a multi-product, multi-period problem while considering product-to-machine assignment and warehouse space constraints. The model aims to reduce inventory costs. The proposed mathematical optimization model allows the relationship between the production rate and the demand rate to vary for each product and in each period; thus, the demand rate may exceed the production rate, or the production rate may exceed the demand rate. Accordingly, 24 different inventory-level diagram cases are introduced and discussed in detail in the next section. To date, no other study has jointly considered these 24 cases and integrated them into a single mathematical model. The sensitivity analysis of the proposed model shows that an approximately 77% reduction in warehouse space leads to an approximately 70% increase in total costs.

Conclusion. This study focuses on simultaneously determining the optimal production and purchasing quantities in an inventory system under specified assumptions. Its main objective is to provide appropriate services to satisfy customer needs. Accordingly, a multi-product, multi-period inventory control system is optimized under a combined production and purchasing policy with shortages permitted; to bring the problem closer to real-world conditions, warehouse capacity and product-to-machine assignment are also considered. Shortages occur in 17 of the 24 proposed subcases. The problem is important because of its broad practical applications and theoretical complexity. The proposed model is a mixed-integer nonlinear programming (MINLP) model, and solving such models involves substantial challenges. Sequential Quadratic Programming (SQP) is used to solve the proposed mathematical model, and the resulting findings are reported.

Keywords: Inventory Control, Production–Procurement, Sequential Quadratic Programming, Multi-product, multi-period.

How to Cite: Miraj, Fariba; Hadji Molana, Seyyed Mohammad; Sajadi, Seyed Mojtaba; Husseinzadeh Kashan, Ali (2026). Multi-product, multi-period inventory control optimization based on a hybrid policy of production and procurement, considering demand rates higher or lower than the production rate. *Ind. Manag. Persp.*, 16(2), 123-154 (*In Persian*).



بهینه‌سازی کنترل موجودی چند محصولی و چند دوره‌ای بر اساس سیاست ترکیبی تولید و خرید محصولات و در نظر گرفتن نرخ تقاضای بالاتر یا پایین‌تر از نرخ تولید

فریبا میراج*

سید محمد حاجی مولانا**

سید مجتبی سجادی***

علی حسین زاده کاشان****

چکیده گسترده

مقدمه و اهداف. برای داشتن یک سیستم کنترل موجودی جامع، معمولاً از مدل‌های مقدار اقتصادی سفارش (EOQ) یا مقدار اقتصادی تولید (EPQ) برای کاهش هزینه‌ها، جلوگیری از تأخیر در سفارش‌ها و دستیابی به عملکرد بالا استفاده می‌شود. بحث تولید و سفارش اقتصادی یکی از مباحث مهم در مسائل کنترل تولید و موجودی می‌باشد و از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بوده است. تولید اقتصادی و سودآور ایجاب می‌کند که برای کلیه مراحل تولید، برنامه‌ریزی جامع و دقیق صورت گیرد. در شرکت‌های تولیدی که در حال تولید گروهی از محصولات هستند، ممکن است در برخی از دوره‌ها نرخ تقاضای مشتریان بیشتر از نرخ تولیدشان شود یا برعکس. در چنین شرایطی شرکت می‌تواند با تولید، خرید و یا پذیرش کمبود پاسخگوی تقاضای مشتریان باشد. در این میان توجه به سیستم‌های مختلف سفارش محصولات بسیار حائز اهمیت است. در اکثر مطالعات مرتبط با موضوع ذکر شده، محققین روش‌هایی ارائه کرده‌اند که بیان می‌کند در شرایطی که هم امکان خرید (سفارش) و هم امکان تولید برای کالای مورد نظر وجود دارد کدامیک بصرفته‌تر است. در واقع بین خرید کالا و یا تولید کالا، با توجه به معیارهای ارائه شده در مدلشان (هزینه، رضایتمندی مشتریان و ...) یکی را انتخاب می‌کنند.

روش‌ها. در این تحقیق یک مدل بهینه‌سازی ریاضی برای تعیین مقدار بهینه تولید و خرید، همچنین زمان شروع تولید برای یک سیستم چند محصولی و چند دوره‌ای با هدف کمینه کردن هزینه کل با توجه به محدودیت‌هایی از قبیل فضای انبار در دسترس و بودجه ارائه شده است. در مدل ارائه شده انواع شرایط قابل رخداد تحت وجود یا عدم وجود کمبود و همچنین بیشتر یا کمتر بودن نرخ تقاضا از نرخ تولید در نظر گرفته شده و سیاست بهینه تعیین می‌شود.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۵/۱۲، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۸/۲۱، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۲۳، تاریخ اولین انتشار: ۱۴۰۵/۰۳/۲۹.

*دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

**استادیار گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

***دانشیار، دانشکده کارآفرینی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

نویسنده مسئول: msajadi@ut.ac.ir

****دانشیار دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران



یافته‌ها. در این پژوهش یک مدل تلفیق تولید و خرید برای مسئله چند محصولی - چند دوره‌ای با در نظر گرفتن تخصیص محصولات به ماشین‌ها و محدودیت فضای انبار ارائه شده است. هدف این مدل کم کردن هزینه‌های موجودی است. در این تحقیق یک مدل بهینه‌سازی ریاضی ارائه شده است که در آن رابطه نرخ تولید و نرخ تقاضا برای هر محصول و در هر دوره می‌تواند متغیر باشد به این معنی که ممکن است نرخ تقاضا بزرگتر از نرخ تولید یا نرخ تولید بزرگتر از نرخ تقاضا باشد. در این راستا ۲۴ حالت مختلف برای دیاگرام سطح موجودی مطرح شده است که در بخش بعدی به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در نظر گرفتن این ۲۴ حالت به طور توأم و ادغام آنها در یک مدل ریاضی تا کنون در مطالعه‌ی دیگری صورت نگرفته است. در بخش تحلیل حساسیت مدل پیشنهادی مشخص می‌شود که کاهش حدوداً ۷۷ درصدی فضای انبار منجر به افزایش حدوداً ۷۰ درصدی مجموع هزینه‌ها می‌شود.

نتیجه‌گیری. در این تحقیق بر روی تعیین همزمان مقدار بهینه تولید و خرید در یک سیستم موجودی تحت فرضیات مشخص تمرکز شده است. هدف اصلی در این تحقیق ارائه خدمات مناسب و برای رضایت نیازهای مشتریان است. بر این اساس یک سیستم کنترل موجودی چند محصولی و چند دوره‌ای در شرایط تولید به همراه خرید با فرض پذیرش کمبود که برای نزدیک‌تر شدن مسئله به شرایط دنیای واقعی محدودیت انبار و تخصیص محصولات به ماشین‌ها نیز در نظر گرفته شده است، بهینه‌سازی شده است. بطور کلی در ۱۷ زیر شرط از ۲۴ زیر شرط ارائه شده، کمبود رخ می‌دهد. این مسئله به دلیل کاربردهای گسترده واقعی و پیچیدگی نظری، بسیار حائز اهمیت است. مدل پیشنهادی یک مدل mixed integer non-linear programming است. حل این مدل‌ها با چالش‌های زیادی مواجه است. در این تحقیق برای حل مدل ریاضی پیشنهادی، از روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی (SQP) استفاده شده است که نتایج حاصل از آن گزارش شده است.

کلمات کلیدی: کنترل موجودی، تولید-خرید، برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، چند محصولی و چند دوره‌ای.

استناددهی: میراج، فریبا؛ حاجی مولانا، سید محمد؛ سجادی، سید مجتبی؛ حسین زاده کاشان، علی (۱۴۰۵). بهینه‌سازی کنترل موجودی چند محصولی و چند دوره‌ای بر اساس سیاست ترکیبی تولید و خرید محصولات و در نظر گرفتن نرخ تقاضای بالاتر یا پایین‌تر از نرخ تولید. چشم‌انداز مدیریت صنعتی، ۱۶(۲)، ۱۲۳-۱۵۴.



۱- مقدمه

محققین در سالیان متوالی در صددند که ابعاد و شرایط مختلف و مهمی را که در زمینه کنترل موجودی در نظر گرفته نشده را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و به دنبال ایجاد روش‌های مناسب‌تری جهت کمینه کردن هزینه‌ها با ارائه رویکردهای علمی مناسب برای ارضای نیازهای سازمان‌ها و شرکت‌ها باشند تا از این طریق آنها هم به اهداف خود نائل آیند.

به منظور کنترل و برنامه‌ریزی جامع یک سیستم مقدار سفارش اقتصادی^۱ (EOQ) و یا مقدار تولید اقتصادی^۲ (EPQ) باید شرایط مختلف را در نظر گرفت تا بتوان با حداقل کردن تاخیر در تامین سفارشات و جلوگیری از بوجود آمدن هزینه‌های اضافی، به بهره‌وری بالا دست یافت. در برخی از شرکت‌های تولیدی که در حال تولید یک یا چند محصول خاص هستند، گاهی ممکن است تقاضای مشتریان به سطحی برسد که امکان پاسخ‌گویی آن توسط تولیدات داخلی وجود ندارد. در چنین وضعیتی نرخ ورود کالا به انبار کمتر از نرخ خروج کالا است بنابراین در ادامه دوره برنامه‌ریزی با کمبود مواجه خواهد شد و در صورت وقوع کمبود در سیستم هزینه‌های زیادی از جمله هزینه کسر اعتبار شرکت، هزینه از دست دادن مشتری و ... به شرکت تحمیل خواهد شد. بنابراین شرکت برای مقابله با چنین مشکلی مجبور است در اول دوره برنامه‌ریزی کسری از تقاضا را از بیرون خریداری کند و سطح موجودی را افزایش دهد تا با خروج کالا از انبار با کمبود مواجه نشود.

در این پژوهش یک مدل تلفیق تولید و خرید برای مسئله چند محصولی - چند دوره‌ای با در نظر گرفتن تخصیص محصولات به ماشین‌ها و محدودیت فضای انبار ارائه شده است. هدف این مدل کم کردن هزینه‌های موجودی است. در این تحقیق یک مدل بهینه‌سازی ریاضی ارائه شده است که در آن رابطه نرخ تولید و نرخ تقاضا برای هر محصول و در هر دوره می‌تواند متغیر باشد به این معنی که ممکن است نرخ تقاضا بزرگتر از نرخ تولید یا نرخ تولید بزرگتر از نرخ تقاضا باشد. در این راستا ۲۴ حالت مختلف برای دیاگرام سطح موجودی مطرح شده است که در بخش بعدی به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در نظر گرفتن این ۲۴ حالت به طور توأم و ادغام آنها در یک مدل ریاضی تا کنون در مطالعه دیگری صورت نگرفته است.

نوآوری‌های این پژوهش را می‌توان در چند محور اصلی خلاصه نمود:

- ۱) ارائه یک مدل یکپارچه تولید-خرید برای مسئله کنترل موجودی چند محصولی و چند دوره‌ای که به صورت همزمان محدودیت فضای انبار و تخصیص محصولات به ماشین‌ها را در نظر می‌گیرد. همچنین مدل‌سازی توأماً تمامی ۲۴ حالت ممکن دیاگرام سطح موجودی، مبتنی بر مقایسه نرخ تولید و نرخ تقاضا و امکان وجود یا عدم وجود کمبود، که در مطالعات پیشین صرفاً بخشی از این حالات به صورت مجزا بررسی شده‌اند.
- ۲) توسعه یک مدل بهینه‌سازی ریاضی از نوع برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط (MINLP) که در آن رابطه بین نرخ تولید و نرخ تقاضا برای هر محصول و هر دوره می‌تواند متغیر باشد.
- ۳) به کارگیری روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی (SQP) برای حل مدل پیشنهادی و گزارش نتایج عددی و تحلیل حساسیت، که امکان حل یک مدل پیچیده و نزدیک به شرایط واقعی را فراهم می‌آورد.

یکی از ویژگی‌های متمایز پژوهش حاضر، در نظر گرفتن ۲۴ حالت مختلف برای دیاگرام سطح موجودی است. این حالات از ترکیب شرایط مختلف نسبت نرخ تولید به نرخ تقاضا (بزرگ‌تر، برابر یا کوچک‌تر بودن)، امکان وجود یا عدم وجود کمبود و نحوه زمان‌بندی شروع و توقف تولید حاصل می‌شوند. در بسیاری از مطالعات پیشین، تنها یک یا چند حالت خاص از دیاگرام سطح موجودی - غالباً بدون کمبود یا با فرض نرخ تولید ثابت - مورد بررسی قرار گرفته است که این امر موجب محدود شدن دامنه کاربرد نتایج می‌گردد. در مقابل، مدل پیشنهادی در این پژوهش با پوشش همزمان تمامی این حالات، امکان انتخاب سیاست بهینه موجودی را متناسب با شرایط واقعی تولید و تقاضا فراهم می‌آورد. این رویکرد سبب می‌شود که مدل قادر باشد رفتار سیستم را در شرایط متنوع عملیاتی شبیه‌سازی کرده و از تحمیل فروض

1. Economic Order Quantity

2. Economic Production Quantity

محدودکننده که در برخی مطالعات پیشین وجود دارد، اجتناب نماید. در نتیجه، مدیران و تصمیم‌گیرندگان می‌توانند بر اساس خروجی‌های مدل، سیاست‌های تولید و موجودی را به‌گونه‌ای انتخاب نمایند که از نظر هزینه‌ای بهینه بوده و با شرایط واقعی سیستم همخوانی داشته باشد. بنابراین، در نظر گرفتن ۲۴ حالت مختلف دیاگرام سطح موجودی نه تنها موجب افزایش جامعیت مدل می‌شود، بلکه به‌عنوان عاملی کلیدی در ارتقای دقت و کاربردی‌تری نتایج نسبت به مدل‌های موجود در ادبیات تحقیق تلقی می‌گردد.

سازماندهی این مقاله به این صورت است که در بخش ۲ به مرور ادبیات تحقیق پرداخته شده است. در بخش ۳ روش‌شناسی پژوهش که در این تحقیق بر روی آن تمرکز شده است صورت می‌گیرد. در این بخش مفروضات تحقیق ارائه می‌شود. همچنین شرایط و زیر شرط‌های مورد بررسی در دیاگرام سطح موجودی تحت مفروضات ذکر شده ارائه شده و مدل ریاضی پیشنهادی مطرح می‌شود. در این بخش روش حل مدل پیشنهادی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴ یک مثال عددی ارائه شده و تحلیل حساسیت مدل و مقایسه نتایج بدست آمده از روش‌های حل مختلف صورت می‌گیرد. در بخش ۵ به کاربردهای مدیریتی مطالعه حاضر پرداخت خواهد شد. نهایتاً در بخش ۶ نتیجه‌گیری از تحقیق انجام شده و پیشنهادات آتی جهت ارائه تحقیقات دیگر ارائه می‌شود.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در این بخش به مرور کارهای انجام‌شده توسط محققان در زمینه کنترل موجودی پرداخته شده است. مدل کلاسیک موجودی EOQ ابتدا توسط هریس^۱ (۱۹۱۳) ابداع شد. در این مدل سفارش به‌صورت آنی دریافت می‌شد، کمبود موجودی وجود نداشت و همه پارامترها قطعی در نظر گرفته شده بودند [۲۱]. این مدل بعدها در محیط‌های قطعی، فازی و احتمالی گسترش یافت تا به شرایط دنیای واقعی نزدیک‌تر شود. هادلی و ویتین^۲ (۱۹۶۳) چندین مدل قطعی را توسعه دادند و مجاز بودن کمبود موجودی را بررسی کردند [۱۸]. نادور^۳ (۱۹۶۵) با حذف فرض دریافت آنی سفارش و مجاز دانستن کمبود، مدل تولید اقتصادی را توسعه داد [۴۰]. هادلی و ویتین^۴ (۱۹۷۵) مدل‌های EOQ و EPQ را با تقاضای احتمالی و امکان کمبود بررسی کردند [۱۹]. چاکرابارتی و همکاران^۵ (۱۹۹۸) مدل EOQ را برای اقلام فسادپذیر، تقاضای رونددار و وجود کمبود گسترش دادند [۸]. اقلام فسادپذیر با گذشت زمان از نظر مقدار یا ارزش کاهش می‌یابد؛ در مقابل، اقلامی که مقدار یا ارزش آن‌ها با زمان افزایش می‌یابد، بهبودپذیر نامیده می‌شوند. کلین هانولد و تونتر^۶ (۱۹۹۸) اثر تنزیل و تغییرپذیری نرخ تقاضا را بر مدل EOQ بررسی کردند [۳۴]. فرمول EOQ شناخته‌شده‌ترین رابطه در نظریه موجودی برای تعیین مقدار بهینه سفارش از طریق کمینه‌سازی هزینه متوسط هر چرخه سفارش است. فاضل و همکاران^۷ (۱۹۹۸) خرید بهنگام را در برابر EOQ همراه با تخفیف قیمت مقایسه کردند و نشان دادند که در تقاضای پایین، JIT و در تقاضای بالا، EOQ می‌تواند ترجیح داشته باشد [۱۴]. لوئیس^۸ (۱۹۹۸) رابطه‌ای برای تعیین دامنه عملی تخفیف قیمت هنگام خرید بیش از EOQ ارائه کرد [۳۵]. ماتسویاما^۹ (۲۰۰۱) مدل EOQ را با تخفیف قیمت خرید یا افزایش هزینه راه‌اندازی بررسی کرد [۳۸].

سلامه و جابر^{۱۰} (۲۰۰۰) مدل EPQ را برای اقلام با کیفیت نامطلوب توسعه دادند [۴۸]. کاردناس-بارون^{۱۱} (۲۰۰۱) مدل EPQ همراه با کمبود را به روش جبری استخراج کرد [۶]. هک‌سور و موسوراکیس^{۱۲} (۲۰۰۵) مدلی برای بهینه‌سازی سیستم موجودی چندمحصولی با چند

1. Harris

2. Hadley and Whitin

3. Nadoor

4. Hadley and Whitin

5. Chakrabarty et al.

6. Klein Haneveld and Teunter

7. Fazl et al.

8. Lewis

9. Matsuyama

10. Salameh and Jaber

11. Cárdenas-Barrón

12. Haksever and Moussourakis

محدودیت ارائه کردند [۲۰]. چيو و چيو^۱ (۲۰۰۶) سياست تأمين مواد را در مدل‌های سفارش و توليد اقتصادي با امکان سفارش معوق بررسی کردند [۱۰]. پنتیکو و همکاران^۲ (۲۰۰۹) رویکرد تازه‌ای برای EPQ قطعی با سفارش معوق جزئی ارائه کردند [۴۵]. پسندیده و همکاران^۳ (۲۰۱۰) الگوریتم ژنتیک تنظیم‌شده‌ای برای مدل EPQ چندمحصولی با محدودیت فضا، تحویل گسسته و کمبود به کار گرفتند [۴۲]. گارسيا-لاگونا و همکاران^۴ (۲۰۱۰) صحیح بودن اندازه انباشته در مدل‌های پایه EOQ و EPQ را تحلیل کردند [۱۷]. چانگ و کاردناس-بارون^۵ (۲۰۱۲) فرایند حل کامل مدل‌های EOQ و EPQ با هزینه‌های خطی و ثابت سفارش معوق را ارائه کردند [۱۱]. تلی‌زاده و همکاران^۶ (۲۰۱۲) مسئله کنترل موجودی تصادفی چندمحصولی با تقاضای پویا و سفارش معوق جزئی را با الگوریتم جست‌وجوی هارمونی حل کردند [۵۲]. لی و همکاران^۷ (۲۰۰۸) راهبرد تعویق را با مدل‌های مبتنی بر EPQ و سفارش معوق برنامه‌ریزی‌شده تحلیل کردند [۳۶]. وانگ و هو^۸ (۲۰۰۸) سیستم کنترل موجودی محصولات دارای اجزای اختیاری را تحت محدودیت سطح خدمت و بودجه بررسی کردند [۵۵]. چانگ و لو^۹ (۲۰۰۹) مدل موجودی با زمان تحویل پیوسته و گسسته، سفارش معوق و فروش ازدست‌رفته را توسعه دادند [۹]. پسندیده، نیکی و میرحسینی^{۱۰} (۲۰۱۰) مدل EPQ چندمحصولی با محدودیت فضا، تحویل گسسته و کمبود را بررسی کردند [۴۴]. پسندیده و همکاران^{۱۱} (۲۰۱۰) مدل EPQ چندمحصولی را با اقلام معیوب، بازکاری و محدودیت فضا توسعه دادند [۴۳]. تلی‌زاده و همکاران^{۱۲} (۲۰۱۰) از شبیه‌سازی تبرید برای بهینه‌سازی مدل موجودی چندمحصولی با تجدید موجودی تصادفی و محدودیت فضا استفاده کردند [۵۱]. کاظمی و همکاران^{۱۳} (۲۰۱۰) مدل موجودی همراه با سفارش معوق را با پارامترها و متغیرهای تصمیم‌فازی ارائه کردند [۲۷]. کاردناس-بارون^{۱۴} (۲۰۱۱) مدل‌های EOQ و EPQ با دو نوع هزینه سفارش معوق را با هندسه تحلیلی و جبر استخراج کرد [۷]. دریک و همکاران^{۱۵} (۲۰۱۱) از EPQ برای برنامه‌ریزی هماهنگ یک محصول و اجزای آن با سفارش معوق جزئی استفاده کردند [۱۲].

مطالعات فوق عمده‌تاً به خرید یا تولید به صورت جداگانه در سیستم‌های کنترل موجودی پرداخته‌اند، در حالی که تصمیم توأم تولید و خرید نیز اهمیت زیادی دارد. نخستین مقاله درباره تصمیم تولید یا خرید کالا توسط فورد و پورتر^{۱۶} (۱۹۱۵) منتشر شد و ضرورت پاسخ به پرسش «تولید یا خرید» را مطرح کرد [۱۶].

در پاسخ به مسئله تولید یا خرید محصول نهایی، کنز و همکاران^{۱۷} (۲۰۰۰) چارچوبی را برای ارزیابی این تصمیم از منظر هزینه، سرعت تحویل و موقعیت راهبردی شرکت توسعه دادند [۵]. رانیک و فیشر^{۱۸} (۱۹۷۲) یک مدل احتمالی برای تصمیم تولید یا خرید ارائه کردند [۴۷]. باست^{۱۹} (۱۹۹۱) این تصمیم را از دیدگاه حسابداری مدیریت بررسی کرد [۳]. الیس^{۲۰} (۱۹۹۳) کاربرد برنامه‌ریزی خطی را برای حل مسائل تولید یا خرید نشان داد [۱۳]. بالا کریشنن^{۲۱} (۱۹۹۴) پویایی تصمیمات تولید یا خرید را تحلیل کرد [۲]. فورد و پورتر^{۲۲} (۱۹۱۵) عوامل مؤثر بر

1. Chiu and Chiu
2. Pentico et al.
3. Pasandideh et al.
4. García-Laguna et al.
5. Chung and Cárdenas-Barrón
6. Taleizadeh et al.
7. Li et al.
8. Wang and Hu
9. Chang and Lo
10. Pasandideh, Niaki, and Mirhosseini
11. Pasandideh et al.
12. Taleizadeh et al.
13. Kazemi et al.
14. Cárdenas-Barrón
15. Drake et al.
16. Ford and Porter
17. Canez et al.
18. Raunick and Fisher
19. Bassett
20. Ellis
21. Balakrishnan
22. Ford and Porter

تصمیم تولید یا خرید را فراتر از هزینه مطرح کردند [۱۶]. هیگینز^۱ (۱۹۵۵) تصمیم تولید یا خرید را دوباره ارزیابی کرد [۲۳]. فورد و فارمر^۲ (۱۹۸۶) این تصمیم را یک مسئله راهبردی کلیدی معرفی کردند [۱۵]. هامفریز و همکاران^۳ (۲۰۰۰) چارچوب پشتیبان تصمیمی برای خرید راهبردی ارائه کردند [۲۴]. هامفریز و همکاران^۴ (۲۰۰۲) در مطالعه‌ای جداگانه، یک سیستم خبره برای ارزیابی تصمیم تولید یا خرید توسعه دادند [۲۵]. خلیل‌پورآذری و همکاران^۵ (۲۰۱۶) مدل EPQ چندمحصولی با سفارش معوق جزئی و محدودیت‌های فیزیکی را با چند روش حل بهینه‌سازی کردند [۳۲]. پیرایش‌نقاب و پورموید^۶ (۲۰۱۱) مقادیر بهینه تولید و خرید را در شرکت‌های چندمحصولی با محدودیت ظرفیت تولید تعیین کردند [۴۱]. پیرایش و پورموید^۷ (۲۰۱۵) الگوریتم GPSO-LS را برای مدل EPQ چندمحصولی با محدودیت ظرفیت تولید ارائه کردند [۴۶]. وزیری و همکاران^۸ (۲۰۱۸) مدل یکپارچه تولید و خرید چنددوره‌ای و چندمحصولی را با تخصیص ماشین و محدودیت انبار توسعه دادند؛ در همه حالت‌های آن مطالعه، نرخ تولید بیشتر از نرخ تقاضا فرض شد [۵۴].

مطالعات جدیدتر نیز ابعاد مختلف EOQ و EPQ و سیاست‌های موجودی را بررسی کرده‌اند. خلیل‌پورآذری و پسندیده^۹ (۲۰۱۸) مدل EOQ چندقلمی را با سفارش معوق جزئی، اقلام معیوب و محدودیت‌های تصادفی بهینه‌سازی کردند [۲۸]. خلیل‌پورآذری و همکاران^{۱۰} (۲۰۱۸) برنامه‌ریزی استوار امکانی را برای EOQ چندقلمی با محموله‌های معیوب ارائه کردند [۳۱]. خلیل‌پورآذری و پسندیده^{۱۱} (۲۰۱۹) مدل EOQ چندقلمی و چندمحدودی را برای اقلام رشدپذیر توسعه دادند [۲۹]. خلیل‌پورآذری و همکاران^{۱۲} (۲۰۱۹) مسئله EOQ چندقلمی را با اقلام ناقص، خطاهای بازرسی و سفارش معوق بهینه‌سازی کردند [۳۳]. ساری و همکاران^{۱۳} (۲۰۲۰) کاربرد روش‌های EOQ و EPQ را در کمینه‌سازی هزینه موجودی روغن نخل خام بررسی کردند [۴۹]. خلیل‌پورآذری و همکاران^{۱۴} (۲۰۱۹) رویکردی فازی و استوار برای EPQ چندمحصولی محدودشده با اقلام ناقص و بازکاری ارائه کردند [۳۰]. توانا و سجادی^{۱۵} (۲۰۲۱) انتخاب همزمان تأمین‌کنندگان و سیاست موجودی زنجیره تأمین چندمحصولی نامطمئن را بررسی کردند [۵۳]. جعفرپور و همکاران^{۱۶} (۲۰۱۹) مدل موجودی و تصمیمات فروش را در زنجیره تأمین دوسطحی با امکان بازکاری و سفارش معوق ادغام کردند [۲۶]. حسن‌پور و همکاران^{۱۷} (۲۰۲۵) برنامه‌ریزی موجودی و زمان‌بندی فعالیت‌ها را در زنجیره تأمین پروژه‌های بازسازی مطالعه کردند [۳۲]. مقیمی شهری و همکاران^{۱۸} (۲۰۲۴) مدل بهینه‌سازی دومعیاره مبتنی بر شبیه‌سازی را برای تجدید موجودی زنجیره تأمین ارائه کردند [۳۹]. احمدی توتکله و همکاران^{۱۹} (۲۰۲۴) کنترل موجودی محصولات فسادپذیر را در سیستم VMI با امکان جایگزینی اقلام ناموجود بررسی کردند [۱].

در سال‌های اخیر، توجه پژوهشگران به توسعه مدل‌های یکپارچه برنامه‌ریزی تولید و موجودی با محدودیت‌های واقعی افزایش یافته است. لو و همکاران^{۲۰} (۲۰۲۵) نشان دادند که مدل‌سازی چنددوره‌ای تولید با تأخیر می‌تواند مدیریت موجودی محصولات نیمه‌ساخته را بهبود دهد [۳۷].

1. Higgins
2. Ford and Farmer
3. Humphreys et al.
4. Humphreys et al.
5. Khalilpourazari et al.
6. Neghab and Poormoaid
7. Pirayesh and Poormoaid
8. Vaziri et al.
9. Khalilpourazari and Pasandideh
10. Khalilpourazari et al.
11. Khalilpourazari and Pasandideh
12. Khalilpourazari et al.
13. Sari et al.
14. Khalilpourazari et al.
15. Tavan and Sajadi
16. Jafaripour et al.
17. Hassanpour et al.
18. Moghimi Shahri et al.
19. Ahmadi Tootkaleh et al.
20. Lu et al.

مرور مبانی نظری و پیشینه پژوهش نشان می‌دهد که اگرچه مطالعات متعددی به بررسی مسائل کنترل موجودی، برنامه‌ریزی تولید و سیاست‌های خرید پرداخته‌اند، اما اغلب این پژوهش‌ها تنها بر بخشی از تصمیمات زنجیره تأمین تمرکز داشته و سایر ابعاد مهم را نادیده گرفته‌اند. به‌طور خاص، در بسیاری از مطالعات، تصمیمات تولید و خرید به‌صورت جداگانه مدل‌سازی شده و یا محدودیت‌های واقعی نظیر ظرفیت ماشین‌ها و فضای انبار به‌طور همزمان در نظر گرفته نشده است.

علاوه بر این، اغلب پژوهش‌های موجود تنها یک یا چند حالت خاص از دیاگرام سطح موجودی را بررسی کرده‌اند و تأثیر تغییر نسبت نرخ تولید به نرخ تقاضا و امکان وقوع کمبود در قالب یک چارچوب جامع مورد توجه قرار نگرفته است. همچنین، بیشتر مطالعات از مدل‌های ساده‌تر با فروض محدودکننده استفاده کرده‌اند که قابلیت کاربرد آن‌ها را در محیط‌های واقعی کاهش می‌دهد. بر این اساس، شکاف اصلی در ادبیات تحقیق، عدم وجود یک مدل یکپارچه و جامع است که بتواند به‌صورت همزمان تصمیمات تولید، خرید و مدیریت موجودی را در یک سیستم چندمحصولی و چنددوره‌ای، همراه با محدودیت‌های واقعی و حالات متنوع سطح موجودی، پوشش دهد. پژوهش حاضر با ارائه یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی عدد صحیح مختلط و بررسی ۲۴ حالت مختلف دیاگرام سطح موجودی، در جهت پر کردن این شکاف و ارتقای جامعیت و کاربرپذیری مدل‌های موجود گام برمی‌دارد. این شکاف پژوهشی، ضرورت انجام مطالعه حاضر و تمایز آن از تحقیقات پیشین را به‌طور روشن تبیین می‌نماید.

۳- روش‌شناسی پژوهش

به منظور کنترل و برنامه‌ریزی جامع یک سیستم مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) و یا مقدار تولید اقتصادی (EPQ) باید شرایط مختلف را در نظر گرفت تا بتوان با حداقل کردن تاخیر در تأمین سفارشات و جلوگیری از بوجود آمدن هزینه‌های اضافی، به بهره‌وری بالا دست یافت. در اینگونه سیستم‌ها در شرایط تولید برای چند محصول، اگر ظرفیت تولید محدود باشد امکان دارد برای برآورده کردن تقاضا سیستم نیازمند خرید و برون‌سپاری تقاضا گردد. در برخی از شرکت‌های تولیدی که در حال تولید یک یا چند محصول خاص هستند، گاهی ممکن است تقاضای مشتریان به سطحی برسد که امکان پاسخ‌گویی آن توسط تولیدات داخلی وجود ندارد. در چنین وضعیتی نرخ ورود کالا به انبار کمتر از نرخ خروج کالا است بنابراین در ادامه دوره برنامه‌ریزی با کمبود مواجه خواهد شد و در صورت وقوع کمبود در سیستم، هزینه‌های زیادی از جمله هزینه کسر اعتبار شرکت، هزینه از دست دادن مشتری و ... به شرکت تحمیل خواهد شد. بنابراین شرکت برای مقابله با چنین مشکلی مجبور است در اول دوره برنامه‌ریزی کسری از تقاضا را از بیرون خریداری کند و سطح موجودی را افزایش دهد تا با خروج کالا از انبار با کمبود مواجه نشود.

این پژوهش، سیستمی را مورد مطالعه قرار می‌دهد که از تلفیق سیستم EOQ با EPQ حاصل می‌شود، به عبارت دیگر یک سیستم تولیدی در نظر گرفته می‌شود که به منظور پاسخ‌گویی به تقاضای مشتریان، خرید نیز دارد. در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مسئله چند محصولی-چنددوره‌ای با در نظر گرفتن تولید به همراه خرید، با فرض پذیرش کمبود توسعه داده می‌شود و برای نزدیک‌تر شدن مدل به شرایط دنیای واقعی محدودیت‌های کاربردی در آن لحاظ می‌شود. هدف مدل تعیین مقدار بهینه تولید، سطحی از موجودی که در آن فرایند تولید آغاز می‌شود، تخصیص بهینه محصولات به ماشین‌ها، تعیین مقدار بهینه خرید و همچنین تعیین مقدار بهینه کمبود می‌باشد، به گونه‌ای که هزینه‌های مربوط به تولید و خرید در یک افق برنامه‌ریزی مشخص کمینه گردد. در مسئله ارائه شده رابطه نرخ تولید و نرخ تقاضا برای هر محصول و در هر دوره می‌تواند متغیر باشد به این معنی که ممکن است نرخ تقاضا بزرگتر از نرخ تولید یا نرخ تولید بزرگتر از نرخ تقاضا باشد.

۳-۱- مفروضات

مفروضات مدل بهینه‌سازی ریاضی مورد بررسی در این تحقیق شامل موارد زیر می‌شود:

✓ بازپرسازی به صورت آنی می‌باشد و در بازه‌های زمانی معین در ابتدای دوره صورت می‌گیرد.

- ✓ برنامه‌ریزی برای چند دوره با اندازه‌های یکسان صورت می‌گیرد.
- ✓ تقاضا کلیه محصولات در هر دوره‌ای مستقل از دوره‌های دیگر است و در هر دوره ثابت است.
- ✓ مقادیر مربوط به پارامترهای مختلف هزینه ثابت و مشخص است.
- ✓ نرخ تولید در هر دوره مستقل از دوره‌های دیگر و ثابت است.
- ✓ نرخ تولید برای محصولات مختلف و در دوره‌های مختلف می‌تواند بیشتر یا کمتر از نرخ تقاضا باشد.
- ✓ هر افق برنامه‌ریزی شامل چندین دوره می‌باشد.
- ✓ کمبود مجاز است.
- ✓ کل بودجه برای تولید و خرید در نظر گرفته شده در ابتدای هر بازه زمانی محدود می‌باشد.
- ✓ در هر دوره حداکثر یکبار خرید در ابتدای دوره توانیم داشته باشیم.
- ✓ محصولات مختلف بر روی ماشین‌های تولیدی قابل تولید می‌باشند.

۲-۳- مدل بهینه‌سازی ریاضی

به طور کلی برای هر محصول i ، $i = \{1, 2, \dots, N\}$ ، دوره‌های زمانی، $t = \{0, 1, \dots, T\}$ در نظر گرفته می‌شود. تعریف پارامترها و متغیرهای مدل در جدول ۱ آمده است:

جدول ۱. معرفی پارامترها و متغیرهای مدل ریاضی پیشنهادی

پارامترها	
علائم	تعریف
D_{it}	نرخ تقاضای هر محصول در هر دوره
P_{it}	نرخ تولید هر محصول در هر دوره
F	حداکثر ظرفیت انبار
w_i	فضای اشغال شده یک واحد از هر محصول در انبار
h_{it}	هزینه نگهداری یک واحد از هر محصول در هر دوره
A_{it}	هزینه سفارش‌دهی هر محصول در هر دوره
A'_{it}	هزینه ثابت تولید هر محصول در هر دوره
C_{it}	هزینه خرید یک واحد از هر محصول در هر دوره
C'_{it}	هزینه تولید یک واحد از هر محصول در هر دوره
C''_k	هزینه بهره‌برداری از هر ماشین برای تولید
λ_{it}	حداکثر موجودی هر محصول در هر دوره
π_{it}	هزینه کمبود یک واحد از هر محصول در هر دوره
β	یک عدد مثبت بسیار بزرگ
ε	یک عدد مثبت بسیار کوچک
S_i	زمان راه‌اندازی هر محصول برای تولید

متغیرها

علائم	تعریف
y_{it}^j	یک متغیر باینری است که برابر با یک است اگر شرایط y_{it}^j برای محصول i در دوره t رخ دهد و در غیر این صورت صفر است.
r_{it}	یک متغیر باینری است که اگر $R_{it} \geq 0$ باشد برابر یک و اگر $R_{it} < 0$ باشد برابر صفر است.
r'_{it}	یک متغیر باینری است که اگر $R_{it} > T_{it}^P(D_{it} - P_{it})$ باشد برابر یک و اگر $R_{it} \leq T_{it}^P(D_{it} - P_{it})$ باشد برابر صفر است.
d_{it}	یک متغیر باینری است که اگر $P_{it} \geq D_{it}$ باشد برابر یک و اگر $P_{it} < D_{it}$ باشد برابر صفر است.
Z_{it}	یک متغیر باینری است که اگر $\lambda_{it} = Q_{it}$ باشد برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر است.

یک متغیر باینری است که اگر $T_{it}^D > 0$ باشد برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر است.	W_{it}^D
یک متغیر باینری است که اگر $T_{it}^P > 0$ باشد برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر است.	W_{it}^P
مقدار سفارش هر محصول در هر دوره	Q_{it}
مقدار تولید هر محصول در هر دوره	Q'_{it}
مقدار کمبود هر محصول در هر دوره	B_{it}
یک متغیر باینری است که برابر با یک است اگر محصول i در دوره t بر روی ماشین k تولید شود و در غیر این صورت برابر با صفر است.	M_{ikt}
سطحی از موجودی که در آن تولید محصول i در دوره t آغاز می‌شود.	R_{it}
فاصله زمانی مصرف محصول i در دوره t از لحظه خرید یا ابتدای دوره تا زمانی که سطح موجودی به R_{it} یعنی سطح شروع تولید، برسد.	T_{it}^Q
فاصله زمانی شروع تولید محصول i در دوره t تا زمانی که تولید متوقف می‌شود.	T_{it}^P
فاصله زمانی که تولید محصول i در دوره t متوقف می‌شود تا انتهای دوره.	T_{it}^D
هزینه نگهداری محصول i در دوره t	TPC_{it}
هزینه خرید و تولید مواد محصول i در دوره t	TOC_{it}
هزینه سفارش و راه اندازی سیستم برای محصول i در دوره t	THC_{it}
هزینه کمبود محصول i در دوره t	TBC_{it}
هزینه مربوط به ماشین‌ها برای محصول i در دوره t	TMC_{it}
کل هزینه نگهداری	THC
کل هزینه خرید و تولید مواد	TPC
کل هزینه سفارش و راه اندازی سیستم	TOC
کل هزینه کمبود	TBC
کل هزینه مربوط به ماشین‌ها	TMC

هزینه‌های در نظر گرفته شده در این مدل مطابق رابطه ۱ شامل چهار هزینه خرید و تولید مواد (TPC)، هزینه سفارش و راه‌اندازی (TOC)، هزینه نگهداری (THC)، هزینه کمبود (TBC) و هزینه تخصیص محصولات به ماشین‌ها (TMC) می‌باشد:

$$Z = TPC + TOC + THC + TBC + TMC \quad \text{رابطه (۱)}$$

اگر هزینه خرید محصول i در دوره t به ازای هر واحد C_{it} و هزینه تولید محصول i در دوره t به ازای هر واحد C'_{it} باشد، آنگاه هزینه خرید Q_{it} واحد از محصول i در هر دوره $C_{it}Q_{it}$ و هزینه تولید Q'_{it} واحد از محصول i در هر دوره $C'_{it}Q'_{it}$ است. بنابراین هزینه سالیانه تولید و خرید مواد از رابطه ۲ حاصل می‌شود.

$$TPC = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T TPC_{it} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (C_{it}Q_{it} + C'_{it}Q'_{it}) \times \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \quad \text{رابطه (۲)}$$

همچنین هزینه سالیانه سفارش‌دهی در زمان خرید A_{it} و راه اندازی تولید A'_{it} به ازای هر واحد محصول است بر این اساس کل هزینه سفارش و راه اندازی تولید برای تمام محصولات در تمام دوره‌های برنامه‌ریزی از رابطه ۳ بدست می‌آید:

$$TOC = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T TOC_{it} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (A_{it} + A'_{it}) \times \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \quad \text{رابطه (۳)}$$

مجموع هزینه‌های نگهداری و مجموع هزینه‌های کمبود به ترتیب بر اساس روابط زیر محاسبه می‌شود.

$$THC = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T THC_{it}$$

$$TBC = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T TBC_{it}$$

به منظور محاسبه هزینه‌های نگهداری و کمبود بر اساس مفروضات در نظر گرفته شده در این تحقیق حالات مختلفی مبتنی بر دیاگرام سطح موجودی قابل بررسی است که تمامی این حالات مطابق جدول ۲، در ۵ شرایط تعریف شده قابل دسته‌بندی می‌باشند. در ادامه هزینه‌های نگهداری و کمبود وارد شده به سیستم در هر یک از این شرایط و زیرشرط‌های مختلف مدل‌سازی و فرموله می‌شود.

جدول ۲. شرایط دیاگرام سطح موجودی بر اساس وضعیت نرخ تقاضا و نرخ تولید نسبت به هم و سطحی از موجودی که تولید در آن آغاز می‌شود

شرایط	وضعیت نرخ تقاضا و نرخ تولید نسبت به هم و سطحی از موجودی که تولید در آن آغاز می‌شود	تعداد زیر شرط‌های مختلف در دیاگرام سطح موجودی
۱	$R_{it} \geq 0, P_{it} \geq D_{it}$	۹
۲	$R_{it} < 0, P_{it} \geq D_{it}$	۴
۳	$R_{it} \geq 0, P_{it} < D_{it}, \text{mode 1}$	۴
۴	$R_{it} \geq 0, P_{it} < D_{it}, \text{mode 2}$	۴
۵	$R_{it} < 0, P_{it} < D_{it}$	۳

در شرط ۱ فرض شده است نرخ تولید بزرگتر یا مساوی نرخ تقاضا است و سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود نیز بزرگتر یا مساوی صفر است. بر این اساس دیاگرام سطح موجودی ۹ حالت مختلف می‌تواند لحاظ کند که در ۹ زیر شرط مختلف مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. به طوری که در زیر شرط ۱-۱ سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود نیز مساوی صفر است. در زیر شرط ۲-۱ علاوه بر R_{it} میزان کمبود و به تبع آن هزینه‌های کمبود نیز صفر در نظر گرفته شده است. زیر شرط ۳-۱ یک مدل EPQ بدون کمبود را نشان می‌دهد. زیر شرط ۴-۱ یک مدل EPQ با کمبود را نشان می‌دهد. در زیر شرط ۵-۱ میزان کمبود و T_{it}^Q نیز مساوی صفر است اما میزان خرید و سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود نیز، مثبت است. در زیر شرط ۶-۱، حالتی در نظر گرفته شده است که در آن مقدار T_{it}^Q نیز صفر است ولی مقادیر R_{it} ، Q_{it} و Bit مثبت هستند. در زیر شرط ۷-۱ نیز تنها مقدار کمبود صفر است. زیر شرط ۸-۱ یک حالت عمومی برای زمانی است که هیچ‌یک از متغیرهای خرید، تولید، کمبود و سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود صفر نیستند و همگی آنها مقداری مثبت دارند. در نهایت دیاگرام سطح موجودی در زیر شرط ۹-۱ یک مدل EOQ بدون کمبود را نشان می‌دهد. دیاگرام زیرشرط‌های ۱-۱ و ۲-۱ به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

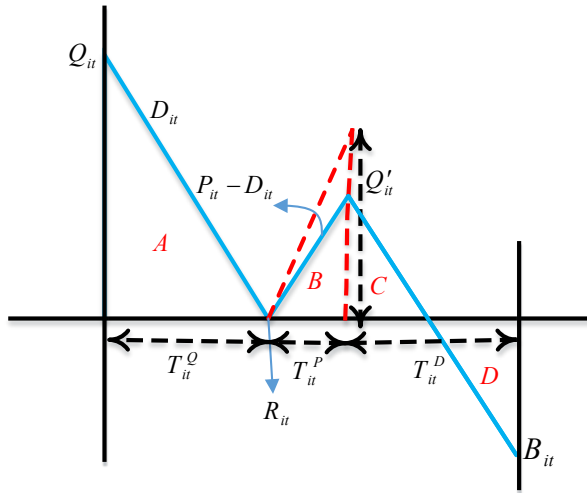
Condition 1: $R_{it} \geq 0, P_{it} \geq D_{it}$

$$THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{(Q_{it} + R_{it})(T_{it}^Q)}{2} + \frac{(2R_{it} + T_{it}^P(P_{it} - D_{it}))(T_{it}^P)}{2} + \frac{(R_{it} + T_{it}^P(P_{it} - D_{it}))(T_{it}^D - \frac{B_{it}}{D_{it}})}{2} \right) \quad \text{رابطه (۴)}$$

رابطه (۵)

$$TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{B_{it} \left(T_{it}^D - \frac{T_{it}^P(P_{it} - D_{it}) + R_{it}}{D_{it}} \right)}{2} \right)$$

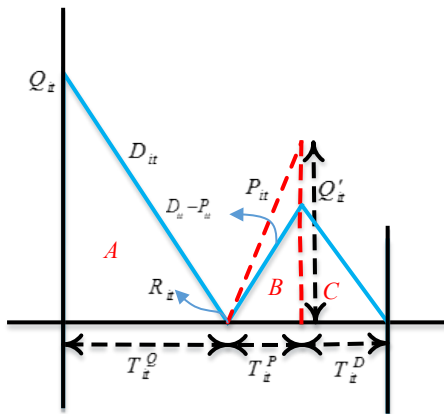
زیر شرط ۱-۱:



شکل ۱.۱. زیر شرط ۱-۱

$$R_{it} = 0 \Rightarrow \begin{cases} THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{Q_{it} T_{it}^Q}{2} + \frac{(T_{it}^P (P_{it} - D_{it})) T_{it}^P}{2} + \left((T_{it}^P (P_{it} - D_{it})) \left(T_{it}^D - \frac{B_{it}}{D_{it}} \right) \right) / 2 \right) \\ TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(B_{it} \left(T_{it}^D - \frac{T_{it}^P (P_{it} - D_{it})}{D_{it}} \right) / 2 \right) \end{cases} \quad \text{رابطه (۶)}$$

زیر شرط ۲-۱:



شکل ۲.۱. زیر شرط ۲-۱

$$\begin{aligned} S_A &= (Q_{it} + R_{it}) (T_{it}^Q) / 2 \\ S_B &= (2R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it})) T_{it}^P / 2 \\ S_C &= \left((R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it})) \left(T_{it}^D - \frac{B_{it}}{D_{it}} \right) \right) / 2 \end{aligned}$$

$$R_{it} = 0, B_{it} = 0 \Rightarrow \begin{cases} THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it})} \left(\frac{Q_{it} T_{it}^Q}{2} + \frac{(T_{it}^P (P_{it} - D_{it})) T_{it}^P}{2} + \frac{((T_{it}^P (P_{it} - D_{it})) T_{it}^D)}{2} \right) \\ TBC_{it} = 0 \end{cases} \quad \text{رابطه (۷)}$$

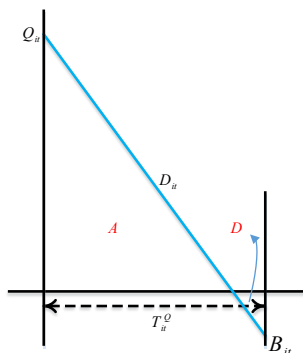
در شرط ۲ نیز همچنان نرخ تولید بزرگتر یا مساوی نرخ تقاضا در نظر گرفته شده است اما بر خلاف شرط ۱، سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود نیز کوچکتر از صفر است. برای این شرط به طور کلی ۴ زیر شرط تعریف می‌شود که زیر شرط ۱-۲ یک مدل EOQ با کمبود است. در زیر شرط ۲-۲ مقادیر متغیرهای اصلی همگی مثبت است. در زیر شرط ۲-۳ با حلت خاصی از دیاگرام حالت مواجه هستیم که در آن $R_{it} = -T_{it}^P (P_{it} - D_{it})$. زیر شرط ۴-۲ مانند زیر شرط ۲-۲ است با این تفاوت که علاوه بر اینکه در وسط دوره به کمبود بر می‌خوریم، در پایان دوره نیز دارای کمبود هستیم. (زیر شرط ۲-۲ الی زیر شرط ۴-۲ در پیوست A) دیاگرام زیر شرط ۱-۲ در شکل ۳ ارائه شده است.

Condition 2: $R_{it} < 0, P_{it} \geq D_{it}$

$$THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{Q_{it} \left(T_{it}^Q + \frac{R_{it}}{D_{it}} \right)}{2} + \frac{W_{it}^P (T_{it}^P (P_{it} - D_{it}) + R_{it}) \left(T_{it}^P + \frac{R_{it}}{(P_{it} - D_{it})} \right)}{2} + \frac{W_{it}^D \left((T_{it}^P (P_{it} - D_{it}) + R_{it}) \left(T_{it}^D - \frac{B_{it}}{D_{it}} \right) \right)}{2} \right) \quad \text{رابطه (۸)}$$

$$TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{W_{it}^P R_{it}^2}{2D_{it}} + \frac{W_{it}^P R_{it}^2}{2(P_{it} - D_{it})} + \frac{B_{it} \left(T_{it}^D - \frac{T_{it}^P (P_{it} - D_{it}) + R_{it}}{D_{it}} \right)}{2} \right) \quad \text{رابطه (۹)}$$

زیر شرط ۱-۲:



شکل ۳. زیر شرط ۱-۲

$$S_A = Q_{it} \left(T_{it}^Q + \frac{R_{it}}{D_{it}} \right) / 2$$

$$S_D = \frac{B_{it} R_{it}}{2D_{it}}$$

$$R_{it} = -B_{it}, T_{it}^P = 0, T_{it}^D = 0, W_{it}^P = 0, W_{it}^D = 0 \Rightarrow \begin{cases} THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{Q_{it} \left(T_{it}^Q + \frac{R_{it}}{D_{it}} \right)}{2} \right) \\ TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{B_{it} R_{it}}{2D_{it}} \right) \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

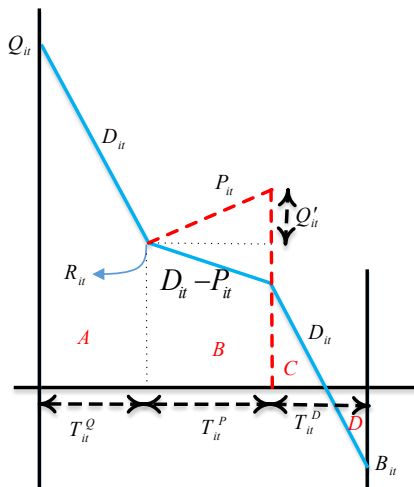
بعد از شرایط ۱ و ۲ که در آنها نرخ تولید بزرگتر یا مساوی نرخ تقاضا بود در شرایط ۳ و ۴ نرخ تولید کمتر از نرخ تقاضا در نظر گرفته شده است. همچنین سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود نیز در هر دوی این شرایط بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد اما بر اساس رابطه‌ی بین R_{it} و $T_{it}^P (D_{it} - P_{it})$ ، شرایط ۳ و ۴ از یکدیگر تفکیک می‌شوند. به طوری که اگر $R_{it} > T_{it}^P (D_{it} - P_{it})$ ، با حالتی خاص از دیاگرام سطح موجودی مواجه هستیم که آنها را در زیر شرطهای شرایط ۳ نشان می‌دهیم. بر این اساس در زیر شرط ۱-۳ همه‌ی متغیرهای اصلی شامل خرید، تولید، کمبود و سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود مقداری مثبت دارند. در زیر شرط ۲-۳ مقدار کمبود صفر در نظر گرفته شده است. در زیر شرط ۳-۳ با حالت خاصی مواجه هستیم که در آن $T_{it}^Q = 0$ و مقدار خرید برابر است با سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود. در این حالت از همان ابتدای دوره تولید آغاز می‌شود. زیر شرط ۴-۳ مانند زیر شرط ۳-۳ است با این تفاوت که در این زیر شرط مقدار کمبود نیز صفر می‌باشد. دیاگرام زیر شرط ۱-۳ در شکل ۴ ارائه شده است.

Condition 3: $R_{it} \geq 0, P_{it} < D_{it}, R_{it} > T_{it}^P (D_{it} - P_{it})$, mode 1

$$THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{(Q_{it} + R_{it}) \left(T_{it}^Q \right)}{2} + \frac{(2R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it})) T_{it}^P}{2} + \frac{\left((R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it})) \left(T_{it}^D - \frac{B_{it}}{D_{it}} \right) \right)}{2} \right) \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

$$TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{B_{it}^2}{2D_{it}} \right) \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

زیر شرط ۱-۳:



شکل ۴. زیر شرط ۱-۳

$$S_A = (Q_{it} + R_{it}) T_{it}^Q / 2$$

$$S_B = (2R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it})) T_{it}^P / 2$$

$$S_C = \left((R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it})) \left(T_{it}^D - \frac{B_{it}}{D_{it}} \right) \right) / 2$$

$$S_D = \left(\frac{B_{it}^2}{2D_{it}} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{(Q_{it} + R_{it})(T_{it}^Q)}{2} + \frac{(2R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))T_{it}^P}{2} + \right. \\ \left. \frac{\left((R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it})) \left(T_{it}^D - \frac{B_{it}}{D_{it}} \right) \right)}{2} \right) \\ TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{B_{it}^2}{2D_{it}} \right) \end{array} \right. \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

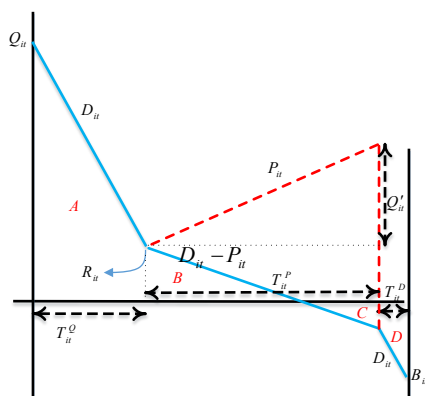
در شرط ۴ نیز مانند شرط ۳ نرخ تولید کمتر از نرخ تقاضا است و سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود نیز بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد. با بین تفاوت که در این condition، $R_{it} \leq T_{it}^P (D_{it} - P_{it})$ به همین دلیل اساساً شرایط ۳ و ۴ را تحت حالت‌های (modes) ۱ و ۲ از یک حالت خاص طبقه‌بندی کرده‌ایم. در زیر شرط ۴-۱ همه‌ی متغیرهای اصلی شامل خرید، تولید، کمبود و سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود مقادیری مثبت دارند. در زیر شرط ۴-۲ سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود صفر است. در زیر شرط ۴-۳ با حالت خاصی مواجه هستیم که در آن $T_{it}^Q = 0$ و مقدار خرید برابر است با سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود. در این حالت از همان ابتدای دوره تولید آغاز می‌شود. نهایتاً در زیر شرط ۴-۴ مقادیر T_{it}^Q و سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود برابر با صفر است. در این حالت سطح موجودی کلاً منفی است. دیگر اگرام زیر شرط ۴-۱ در شکل ۵ ارائه شده است.

Condition 4: $R_{it} \geq 0, P_{it} < D_{it}, R_{it} \leq T_{it}^P (D_{it} - P_{it})$, mode 2

$$THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{(Q_{it} + R_{it})(T_{it}^Q)}{2} + \frac{R_{it}^2}{2(D_{it} - P_{it})} \right) \quad \text{المعادلة (١٤)}$$

$$TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{\left(T_{it}^P - \frac{R_{it}}{(D_{it} - P_{it})} \right) (B_{it} - D_{it} T_{it}^D)}{2} + \frac{T_{it}^D (2B_{it} - D_{it} T_{it}^D)}{2} \right) \quad \text{رابطه (۱۵)}$$

زیر شرط ۴-۱:



شکل ۵. زیر شرط ۴-۱

$$S_A = (Q_{it} + R_{it})(T_{it}^Q)/2$$

$$S_B = \frac{R_{it}^2}{2(D_{it} - P_{it})}$$

$$S_C = \left(T_{it}^P - \frac{R_{it}}{(D_{it} - P_{it})} \right) (B_{it} - D_{it} T_{it}^D) / 2$$

$$S_D = T_{it}^D (2B_{it} - D_{it} T_{it}^D) / 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{(Q_{it} + R_{it})(T_{it}^Q)}{2} + \frac{R_{it}^2}{2(D_{it} - P_{it})} \right) \\ TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{\left(T_{it}^P - \frac{R_{it}}{(D_{it} - P_{it})} \right) (B_{it} - D_{it} T_{it}^D)}{2} + \frac{T_{it}^D (2B_{it} - D_{it} T_{it}^D)}{2} \right) \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

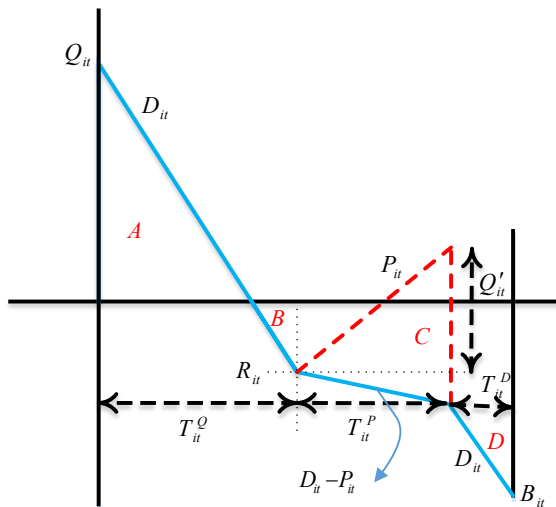
در شرط ۵ مانند شرایط ۳ و ۴ همچنان نرخ تولید کمتر از نرخ تقاضا است با این تفاوت که سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود نیز منفی است. این شرط به طوری کلی دارای ۳ زیر شرط است. در زیر شرط ۵-۱ خرید، تولید، کمبود مقادیری مثبت دارند ولی سطحی از موجودی که در آن تولید شروع می‌شود منفی است. در زیر شرط ۵-۲ مقدار خرید و T_{it}^Q صفر است. نهایتاً در زیر شرط ۵-۳ مقدار T_{it}^D برابر صفر می‌باشد. دیاگرام زیر شرط ۵-۱ در شکل ۶ ارائه شده است.

Condition 5: $R_{it} < 0, P_{it} < D_{it}$

$$THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{(Q_{it}) \left(T_{it}^Q + \frac{R_{it}}{D_{it}} \right)}{2} \right) \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

$$TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{\frac{R_{it}^2}{2D_{it}} + \frac{T_{it}^P (-2R_{it} + T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))}{2}}{T_{it}^D (B_{it} - R_{it} + T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))} + \frac{T_{it}^D (B_{it} - R_{it} + T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))}{2} \right) \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

زیر شرط ۵-۱:



شکل ۶. زیر شرط ۵-۱

$$S_A = (Q_{it}) \left(T_{it}^Q + \frac{R_{it}}{D_{it}} \right) / 2$$

$$S_B = \frac{R_{it}^2}{D_{it}} / 2$$

$$S_C = \frac{T_{it}^P (-2R_{it} + T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))}{2}$$

$$S_D = \frac{T_{it}^D (B_{it} - R_{it} + T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} THC_{it} = h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{(Q_{it}) \left(T_{it}^Q + \frac{R_{it}}{D_{it}} \right)}{2} \right) \\ TBC_{it} = \pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it} + Q'_{it} + B_{it})} \left(\frac{\frac{R_{it}^2}{2D_{it}} + \frac{T_{it}^P (-2R_{it} + T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))}{2}}{T_{it}^D (B_{it} - R_{it} + T_{it}^P (D_{it} - P_{it}))} + \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۹)}$$

اکنون متغیر باینری y_{it}^j را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر برای محصول i در دوره t شرایط ز به وقوع پیوست مقدار این متغیر یک و در غیر این صورت صفر است. همچنین متغیر باینری r_{it} که اگر $R_{it} \geq 0$ مقدار آن ۱ و در صورتی که $R_{it} < 0$ مقدار آن برابر با ۰ خواهد بود. متغیر باینری r'_{it} به این صورت تعریف می‌شود که اگر $R_{it} > T_{it}^P (D_{it} - P_{it})$ مقدار آن ۱ و در صورتی که $R_{it} \leq T_{it}^P (D_{it} - P_{it})$ مقدار آن برابر با ۰ خواهد بود. مقدار آن $P_{it} \geq D_{it}$ به این صورت تعریف می‌شود که اگر $P_{it} < D_{it}$ مقدار آن برابر با ۰ خواهد بود.

با توجه به اینکه برای هر محصول در هر دوره‌ی زمانی تنه‌ای یکی از شرایط ارائه شده‌ی فوق قابل رخداد است، محدودیت‌های ۳۸ تا ۵۴ بر اساس ویژگی‌های هر یک از این شرایط، تعریف می‌شود.

$$\sum_{j=1}^5 y_{it}^j = 1; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۰)}$$

$$y_{it}^1 \geq 1 - (1 - r_{it})\beta - (1 - d_{it})\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۱)}$$

$$y_{it}^1 \leq 1 + (1 - r_{it})\beta + (1 - d_{it})\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۲)}$$

$$y_{it}^2 \geq 1 - r_{it}\beta - (1 - d_{it})\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۳)}$$

$$y_{it}^2 \leq 1 + r_{it}\beta + (1 - d_{it})\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۴)}$$

$$y_{it}^3 \geq 1 - (1 - r_{it})\beta - d_{it}\beta - (1 - r'_{it})\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۵)}$$

$$y_{it}^3 \leq 1 + (1 - r_{it})\beta + d_{it}\beta + (1 - r'_{it})\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۶)}$$

$$y_{it}^4 \geq 1 - (1 - r_{it})\beta - d_{it}\beta - r'_{it}\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۷)}$$

$$y_{it}^4 \leq 1 + (1 - r_{it})\beta + d_{it}\beta + r'_{it}\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۸)}$$

$$y_{it}^5 \geq 1 - r_{it}\beta - d_{it}\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۲۹)}$$

$$y_{it}^5 \leq 1 + r_{it}\beta + d_{it}\beta; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۳۰)}$$

$$R_{it} + \varepsilon \leq \beta r_{it}; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۳۱)}$$

$$R_{it} \geq -\beta(1 - r_{it}); \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۳۲)}$$

$$R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it}) \leq \beta r'_{it}; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۳۳)}$$

$$R_{it} - T_{it}^P (D_{it} - P_{it}) - \varepsilon \geq -\beta(1 - r'_{it}); \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۳۴)}$$

$$(P_{it} - D_{it}) + \varepsilon \leq \beta d_{it}; \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۳۵)}$$

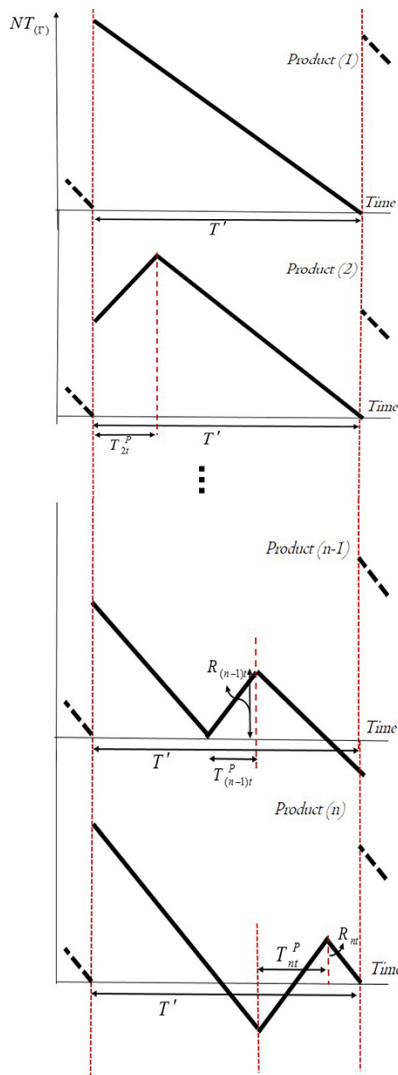
$$(P_{it} - D_{it}) \geq -\beta(1 - d_{it}); \quad \forall i \in I \quad t \in T \quad \text{رابطه (۳۶)}$$

شکل ۷ نحوه محاسبه هزینه‌های ماشینکاری را در قالب یک مثال نشان می‌دهد. به طوری که در این مثال محصول ۱ اصلاً تولید نشده و به همین جهت از هیچ ماشین برای تولید استفاده نکرده است ($T_p^1 = 0$). محصول ۲ از ابتدای دوره‌ی زمانی در نظر گرفته شده تولید می‌شود ($T_p^2 > 0$). متغیر M_{ikt} به عنوان یک متغیر باینری اگر محصول i بر روی ماشین k در پریود زمانی t تولید شود برابر یک و در غیر این صورت صفر است. همچنین پارامتر C_k'' هزینه بهره‌برداری از ماشین k می‌باشد. بر این اساس هزینه کل ماشینکاری از رابطه‌ی ۵۵ قابل محاسبه است:

$$TMC = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T C_k'' M_{ikt} \quad \text{رابطه (۳۷)}$$

از آنجایی که محصولات مختلف بر روی ماشین‌های مختلف قابل تولید هستند، محدودیت‌های ۵۶ بدین امر اشاره دارد که اگر بیش از یک محصول بر روی یک ماشین تولید می‌شود، نمی‌بایست مجموع زمان تولید T_{it}^P و راه اندازی S_i آنها از طول دوره تجاوز کند. شکل ۷ چرایی این محدودیت را به صورت شماتیک توضیح می‌دهد.

$$\sum_{i=1}^N M_{itk} (T_{it}^P + S_i) \leq T'_{total}; t \in T, k \in K \quad \text{رابطه (۳۸)}$$



شکل ۷. نمایش تولید n محصول بر روی یک ماشین در یک دوره

محدودیت ۳۹ تضمین می‌کند که هر محصول در هر دوره بر روی بیش از یک ماشین تولید نشود.

$$\sum_{k=1}^K M_{itk} \leq 1, \quad i \in N, t \in T \quad \text{رابطه (۳۹)}$$

محدودیت ۴۰ تضمین می‌کند که هر محصول در هر دوره بر روی بیش از یک ماشین تولید نشود.

$$M_{itk} \leq \beta T_{it}^P; \quad i \in I, k \in K, t \in T \quad \text{رابطه (۴۰)}$$

از محدودیت‌های اساسی مسئله در دنیای واقعی، محدودیت فضای انبار است، محدودیت‌های ۴۱ تا ۴۴ تضمین می‌کند که حجم کلیه محصولات در هر دوره از حداکثر فضای انبار تجاوز نکند.

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{it} w_i \leq F; \quad \forall t \in T \quad \text{رابطه (۴۱)}$$

$$\lambda_{it} = Z_{it} Q_{it} + (1 - Z_{it}) (R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it})); \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۲)}$$

$$\lambda_{it} \geq Q_{it}; \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۳)}$$

$$\lambda_{it} \geq R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it}); \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۴)}$$

مدل ارائه شده در این تحقیق در هر دوره سه بازه زمانی T_{it}^Q ، T_{it}^P و T_{it}^D را شامل می‌شود که از روابط ۴۵ تا ۴۷ بدست می‌آید.

$$T_{it}^Q = \frac{Q_{it} - R_{it}}{D_{it}}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۵)}$$

$$T_{it}^P = \frac{Q'_{it}}{P_{it}}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۶)}$$

$$T_{it}^D = \frac{R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it}) + B_{it}}{D_{it}}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۷)}$$

مجموع این سه بازه زمانی نمی‌بایست از طول دوره T_{it}^S تجاوز کند. محدودیت ۴۸ برای تضمین این موضوع می‌باشد.

$$T_{it}^S = T_{it}^Q + T_{it}^P + T_{it}^D = \frac{Q_{it} + Q'_{it} + B_{it}}{D_{it}}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۸)}$$

همچنین به منظور داشتن یک مدت زمان ثابت برای هر دوره‌ی زمانی در نظر گرفته شده در هر پریود T'_{total} ، محدودیت ۴۹ لحاظ می‌شود.

$$T_{it}^S = T'_{total}; \quad \forall i \in I, t \in T \quad \text{رابطه (۴۹)}$$

بر اساس توضیحات فوق مدل ریاضی پیشنهادی در این تحقیق به صورت مدل ۵۰ قابل ارائه است.

$$\text{Min } TC = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} (C_{it} Q_{it} + C'_{it} Q'_{it}) \frac{D_{it}}{Q_{it} + Q'_{it} + B_{it}} + (A_{it} + A'_{it}) \frac{D_{it}}{Q_{it} + Q'_{it} + B_{it}} \quad \text{رابطه (۵۰)}$$

$$\begin{aligned}
& +h_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it}+Q'_{it}+B_{it})} \left\{ y_{it}^1 \left(\frac{(Q_{it}+R_{it})(T_{it}^Q)}{2} + \frac{(2R_{it}+T_{it}^P(P_{it}-D_{it}))T_{it}^P}{2} + \frac{(R_{it}+T_{it}^P(P_{it}-D_{it}))\left(T_{it}^D-\frac{B_{it}}{D_{it}}\right)}{2} \right) \right. \\
& +y_{it}^2 \left(\frac{Q_{it}\left(T_{it}^Q+\frac{R_{it}}{D_{it}}\right)}{2} + \frac{W_{it}^P(T_{it}^P(P_{it}-D_{it})+R_{it})\left(T_{it}^P+\frac{R_{it}}{(P_{it}-D_{it})}\right)}{2} + \frac{W_{it}^D\left(T_{it}^P(P_{it}-D_{it})+R_{it}\right)\left(T_{it}^D-\frac{B_{it}}{D_{it}}\right)}{2} \right) \\
& +y_{it}^3 \left(\frac{(Q_{it}+R_{it})(T_{it}^Q)}{2} + \frac{(2R_{it}-T_{it}^P(D_{it}-P_{it}))T_{it}^P}{2} + \frac{\left((R_{it}-T_{it}^P(D_{it}-P_{it}))\left(T_{it}^D-\frac{B_{it}}{D_{it}}\right)\right)}{2} \right) \\
& +y_{it}^4 \left(\frac{(Q_{it}+R_{it})(T_{it}^Q)}{2} + \frac{R_{it}^2}{2(D_{it}-P_{it})} \right) + y_{it}^5 \left(\frac{(Q_{it})\left(T_{it}^Q+\frac{R_{it}}{D_{it}}\right)}{2} \right\} \\
& +\pi_{it} \frac{D_{it}}{(Q_{it}+Q'_{it}+B_{it})} \left\{ y_{it}^1 \left(\frac{B_{it}\left(T_{it}^D-\frac{T_{it}^P(P_{it}-D_{it})+R_{it}}{D_{it}}\right)}{2} \right) \right. \\
& +y_{it}^2 \left(\frac{W_{it}^P R_{it}^2}{2D_{it}} + \frac{W_{it}^P R_{it}^2}{2(P_{it}-D_{it})} + \frac{B_{it}\left(T_{it}^D-\frac{T_{it}^P(P_{it}-D_{it})+R_{it}}{D_{it}}\right)}{2} \right) \\
& +y_{it}^3 \left(\frac{B_{it}^2}{2D_{it}} \right) \\
& +y_{it}^4 \left(\frac{\left(T_{it}^P-\frac{R_{it}}{(D_{it}-P_{it})}\right)(B_{it}-D_{it}T_{it}^D)}{2} + \frac{T_{it}^D(2B_{it}-D_{it}T_{it}^D)}{2} \right) \\
& +y_{it}^5 \left(\frac{R_{it}^2}{2D_{it}} + \frac{T_{it}^P(-2R_{it}+T_{it}^P(D_{it}-P_{it}))}{2} + \frac{T_{it}^D(B_{it}-R_{it}+T_{it}^P(D_{it}-P_{it}))}{2} \right) \Big\} \\
& +\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T W_{it}^P C_k'' M_{ikt}
\end{aligned}$$

s.t.

$$T_{it}^Q = \frac{Q_{it}-R_{it}}{D_{it}}, \forall i \in I, t \in T$$

$$T_{it}^P = \frac{Q'_{it}}{P_{it}}, \forall i \in I, t \in T$$

$$T_{it}^D = \frac{R_{it}+T_{it}^P(P_{it}-D_{it})+B_{it}}{D_{it}}, \forall i \in I, t \in T$$

$$T_{it}^S = T_{it}^Q + T_{it}^P + T_{it}^D; \forall i \in I, t \in T$$

$$T_{it}^S = T'_{total}; \forall i \in I, t \in T$$

$$\sum_{j=1}^5 y_{it}^j = 1; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^1 \geq 1 - (1 - r_{it})\beta - (1 - d_{it})\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^1 \leq 1 + (1 - r_{it})\beta + (1 - d_{it})\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^2 \geq 1 - r_{it}\beta - (1 - d_{it})\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^2 \leq 1 + r_{it}\beta + (1 - d_{it})\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^3 \geq 1 - (1 - r_{it})\beta - d_{it}\beta - (1 - r'_{it})\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^3 \leq 1 + (1 - r_{it})\beta + d_{it}\beta + (1 - r'_{it})\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^4 \geq 1 - (1 - r_{it})\beta - d_{it}\beta - r'_{it}\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^4 \leq 1 + (1 - r_{it})\beta + d_{it}\beta + r'_{it}\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^5 \geq 1 - r_{it}\beta - d_{it}\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$y_{it}^5 \leq 1 + r_{it}\beta + d_{it}\beta; \forall i \in I, t \in T$$

$$R_{it} + \varepsilon \leq \beta r_{it}; \forall i \in I, t \in T$$

$$R_{it} \geq -\beta(1 - r_{it}); \forall i \in I, t \in T$$

$$R - T_{it}^P (D_{it} - P_{it}) \leq \beta r'_{it}$$

$$R - T_{it}^P (D_{it} - P_{it}) - \varepsilon \geq -\beta(1 - r'_{it})$$

$$(P_{it} - D_{it}) + \varepsilon \leq \beta d_{it}; \forall i \in I, t \in T$$

$$(P_{it} - D_{it}) \geq -\beta(1 - d_{it}); \forall i \in I, t \in T$$

$$T_{it}^P \leq \beta W_{it}^P; \forall i \in I, t \in T$$

$$T_{it}^D \leq \beta W_{it}^D; \forall i \in I, t \in T$$

$$\sum_{i=1}^N M_{itk} (T_{it}^P + S_i) \leq T'_{total}; t \in T, k \in K$$

$$\sum_{k=1}^K M_{itk} \leq 1; i \in I, t \in T$$

$$M_{itk} \leq \beta T_{it}^P; i \in I, k \in K, t \in T$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{it} w_i \leq F; \forall t \in T$$

$$\lambda_{it} = Z_{it} Q_{it} + (1 - Z_{it}) (R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it})); \forall i \in I, t \in T$$

$$\lambda_{it} \geq Q_{it}; \forall i \in I, t \in T$$

$$\lambda_{it} \geq R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it}); \forall i \in I, t \in T$$

$$Q_{it}, Q'_{it}, B_{it}, T_{it}^Q, T_{it}^P, T_{it}^D \geq 0$$

$$y_{it}, Z_{it}, y_{it}^j, W_{it}^P, W_{it}^D, M_{itk} \in \{0, 1\}$$

$$\forall i \in I, t \in T; I = \{1, 2, \dots, N\}, T = \{0, 1, 2, \dots, T\}, j = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$$

۳-۳- برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی

مدل بهینه‌سازی ریاضی پیشنهادی در این تحقیق یک مدل غیرخطی با ترکیبی از متغیرهای عدد صحیح و پیوسته است. این نوع مسائل در کلاس مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط^۱ (MINLP) قرار می‌گیرد. پیاده‌سازی روش‌های حل دقیق برای حل این نوع مسائل به جز در موارد خاص نشدنی است [۵۰]. لذا در این مطالعه برای بهینه‌سازی مدل پیشنهادی از روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، استفاده شده است.

مدل ارائه‌شده در این پژوهش در قالب یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط فرموله شده است که شامل توابع غیرخطی و قیود پیوسته می‌باشد. از این رو، انتخاب روش حل مناسب نقش مهمی در دستیابی به جواب‌های قابل اعتماد دارد. روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی (SQP) به دلیل توانایی بالا در حل مسائل غیرخطی با قیود پیچیده و همگرایی مناسب به جواب‌های بهینه محلی، به عنوان روش حل مدل انتخاب شده است. یکی از مزیت‌های اصلی SQP نسبت به الگوریتم‌های فراابتکاری، قابلیت استفاده از ساختار ریاضی مدل و ارائه جواب‌های پایدار و قابل تکرار است؛ در حالی که روش‌های فراابتکاری معمولاً نیازمند تنظیم پارامترهای متعدد بوده و نتایج آن‌ها می‌تواند به شرایط اولیه و تنظیمات الگوریتم حساس باشد. با توجه به تمرکز پژوهش حاضر بر تحلیل دقیق رفتار مدل و استخراج بینش‌های مدیریتی، استفاده از روشی مبتنی بر بهینه‌سازی ریاضی مناسب‌تر تشخیص داده شد.

در ادامه‌ی این بخش، نحوه استفاده از این روش تشریح می‌شود. ساختار جواب برای حل مدل ریاضی پیشنهادی در این روش حائز اهمیت است. به طوری که طراحی ساختار جواب از دو بخش رمزگذاری^۲ و رمزگشایی^۳ تشکیل می‌شود. فرایند رمزگذاری برای حل مسئله ارائه شده، مشتمل بر پنج ماتریس است. در این تحقیق، ساختار جواب برای حل مدل ریاضی مربوط به صورت زیر است:

در این پژوهش، ساختار جواب شامل مقدار سفارش (L_{it}^Q) ، مقدار تولید $(L_{it}^{Q'})$ ، مقدار کمبود (L_{it}^B) ، سطحی از موجودی که تولید در آن آغاز می‌شود (R_{it}) و تخصیص ماشین‌ها به محصولات (L_{it}^M) است. شکل ۸، نمایانگر ساختار جواب برای مسئله ارائه شده است. به گونه‌ای که ردیف‌ها و ستون‌ها هر کدام به ترتیب محصولات و دوره‌های زمانی می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} L_{11}^Q & \dots & L_{1T}^Q & L_{11}^B & \dots & L_{1T}^B & L_{11}^{Q'} & \dots & L_{1T}^{Q'} & R_{11} & \dots & R_{1T} & L_{11}^M & \dots & L_{1T}^M \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{N1}^Q & \dots & L_{NT}^Q & L_{N1}^B & \dots & L_{NT}^B & L_{N1}^{Q'} & \dots & L_{NT}^{Q'} & R_{N1} & \dots & R_{NT} & L_{N1}^M & \dots & L_{NT}^M \end{bmatrix}$$

شکل ۸. یک نمای شماتیک از ساختار جواب طراحی شده

در فاز ابتدایی روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، هر یک از عناصر ماتریس فوق برای جواب اولیه با استفاده از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ ایجاد می‌شوند $(x \sim U(0,1))$. سپس درایه‌های ماتریس فوق بر اساس حداکثر و حداقل مقدار مجاز برای هر عنصر و از رابطه
$$x \times (x_{max} - x_{min} + x_{min})$$
 بدست می‌آید.

پس از ایجاد هر جواب، می‌بایست متغیرهای مدل مقداردهی شده و میزان برازندگی هر جواب ارزیابی شود. این کار در فاز رمزگشایی صورت می‌گیرد. برای این منظور هریک از متغیرهای مدل ریاضی ارائه شده بر اساس روابط زیر مبتنی بر جواب‌های تولید شده در فاز رمزگذاری مقداردهی می‌گردند. همچنین تابع برازندگی هر جواب با توجه به محدودیت‌های مدل به صورت رابطه ۸۵ قابل ارائه است. در روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی در واقع تابع برازندگی ۸۵ تحت متغیرهای تصمیم مسئله بهینه‌سازی می‌شود.

$$Q_{it} = \frac{L_{it}^Q \cdot (D_{it} T'_{total})}{L_{it}^{Q'} + L_{it}^B + L_{it}^Q} \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۱)}$$

1. Mixed integer non-linear programming
2. Encoding
3. Decoding

$$Q'_{it} = \frac{L_{it}^{Q'} \cdot (D_{it} T'_{total})}{L_{it}^{Q'} + L_{it}^B + L_{it}^Q} \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۲)}$$

$$B_{it} = \frac{L_{it}^B \cdot (D_{it} T'_{total})}{L_{it}^{Q'} + L_{it}^B + L_{it}^Q} \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۳)}$$

$$M_{i,t,L_{it}^M} = 1 \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۴)}$$

$$T_{it}^Q = \frac{Q_{it} - R_{it}}{D_{it}} \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۵)}$$

$$T_{it}^{Q'} = \frac{Q'_{it}}{P_{it}} \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۶)}$$

$$T_{it}^D = \frac{R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it}) + B_{it}}{D_{it}} \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۷)}$$

$$\text{if } R_{it} \geq 0 \text{ then } r_{it} = 1 \text{ else } r_{it} = 0 \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۸)}$$

$$\text{if } R_{it} > T_{it}^P (D_{it} - P_{it}) \text{ then } r'_{it} = 1 \text{ then } r'_{it} = 0 \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۵۹)}$$

$$\lambda_{it} = \max \{Q_{it}, R_{it} + T_{it}^P (P_{it} - D_{it})\} \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۶۰)}$$

$$\text{if } T_{it}^P \geq 0 \text{ then } W_{it}^P = 1 \text{ else } W_{it}^P = 0 \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۶۱)}$$

$$\text{if } T_{it}^D \geq 0 \text{ then } W_{it}^D = 1 \text{ else } W_{it}^D = 0 \quad \forall i, t \quad \text{رابطه (۶۲)}$$

$$f_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \min \{T_{it}^D, 0\} \quad \text{رابطه (۶۳)}$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \min \{T_{it}^Q, 0\} \quad \text{رابطه (۶۴)}$$

$$f_3 = \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \max \left\{ \sum_{i=1}^N M_{itk} (T_{it}^P + S_i) - T'_{total}, 0 \right\} \quad \text{رابطه (۶۵)}$$

$$f_4 = \sum_{t=1}^T \max \left\{ \sum_{i=1}^N w_i \lambda_{it} - F, 0 \right\} \quad \text{رابطه (۶۶)}$$

$$\text{function evaluation} = \text{Objective Value} \times (1 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \quad \text{رابطه (۶۷)}$$

در ادامه روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی (SQP) تشریح می‌شود. این الگوریتم، یک روش ابتکاری شناخته‌شده برای حل مسائل غیرخطی است. الگوریتم SQP یکی از روش‌های ریاضی توانمند در زمینه بهینه‌سازی می‌باشد. در هر تکرار اصلی روش SQP تقریبی از هسیان تابع لاگرانژ^۱ با استفاده از یک روش به روز کننده شبه نیوتنی^۲ بدست می‌آید. سپس این تقریب برای تولید یک زیر مسئله QP که هدف از آن یافتن جهتی برای جستجوی خطی می‌باشد، به کار می‌رود. جزئیات مربوط به این روش در مرجع [۴] توضیح داده شده است. با توجه به حساسیت SQP به جواب اولیه، در این تحقیق از چندین جواب اولیه تصادفی مختلف جهت پیاده‌سازی این الگوریتم استفاده می‌شود و بهترین نتیجه حاصل شده ذخیره می‌گردد. در ادامه نحوه کارکرد الگوریتم SQP با جزئیات بیشتری تشریح می‌شود.

1. Hessian of lagrangian function

2. Quasi-Newton update method

معمولاً الگوریتم‌های ابتکاری طراحی داده شده برای مسائل بهینه‌سازی ریاضی مقدماتی برای مسائل بهینه‌سازی با قيود مساوی تدوین شده و سپس برای محدودیت‌های نامساوی توسعه داده می‌شوند. SQP نیز از این قاعده کلی مستثنا نیست. در این راستا به‌کارگیری روش مجموعه مؤثر^۱، برای بررسی محدودیت‌های نامساوی ممکن است به مسائل ترکیبی دشواری منجر شود. در الگوریتم برنامه‌ریزی درجه دوم تکراری برای محدودیت‌های نامساوی تحت تأثیر روش مجموعه مؤثر، یا سایر روش‌ها، در هر تکرار، یک تابع درجه دوم روی یک چندوجهی مینیمم می‌شود، که این یک زیر مسئله نسبتاً پیچیده است.

به‌طور کلی در روش‌های مبتنی بر تابع جریمه محدودیت‌های مساوی و نامساوی با تابع هدف ترکیب می‌شود. این شیوه سبب می‌شود که مسائل ترکیبی ساده‌تر شوند. از طرف دیگر مینیمم سازی تنها با محدودیت‌های مساوی مسئله مناسب‌تری است و در موارد زیادی حل آن دشواری کمتری نسبت به حل مسائل با محدودیت‌های نامساوی، در ابعاد مشابه دارد. دلیل اصلی این است که، شرایط KKT^2 برای مسئله با محدودیت‌های مساوی، دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری است. جهت تشریح گام به گام الگوریتم SQP، مسئله بهینه‌سازی پایه‌ی (۶۸) را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } f(x)$$

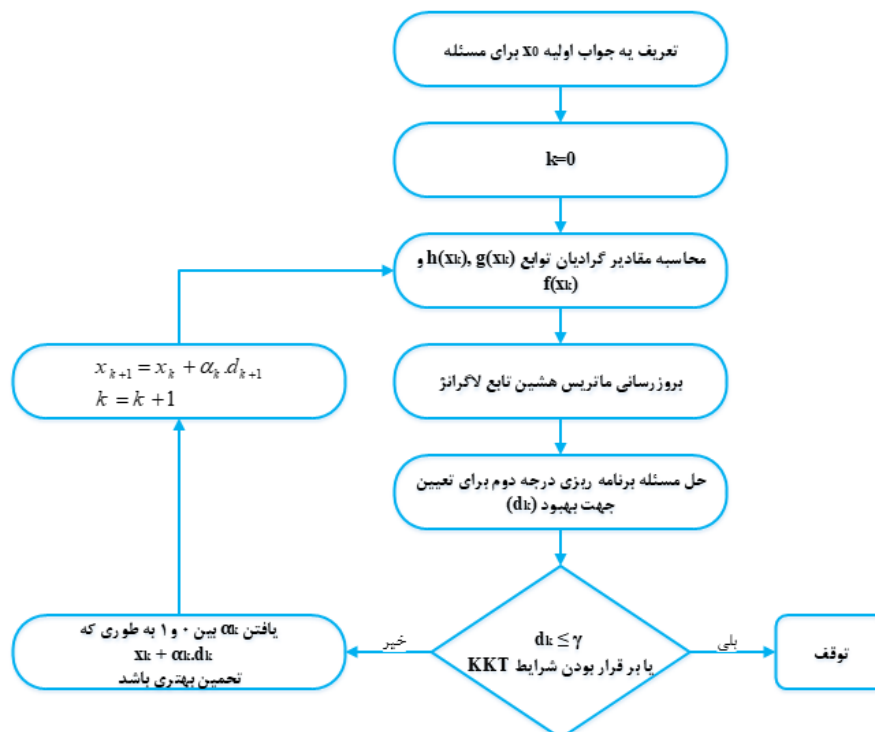
$$S.t$$

$$h(x) = 0$$

$$g(x) \leq 0$$

رابطه (۶۸)

جهت بهینه‌سازی مسئله فوق، مراحل الگوریتم SQP بر اساس فلوجارت ارائه در شکل ۹ طی می‌شود. در این تحقیق از نرم‌افزار MATLAB برای پیاده‌سازی الگوریتم SQP استفاده شده است.



شکل ۹. ساختار الگوریتم SQP

1. Active set
2. Karush-Kuhn-Tucker

۴- تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

۴-۱- مثال عددی

در یک مثال عددی فرض کنید که ۱۰ محصول در ۳ دوره مختلف در اختیار داریم و به طور کلی ۴ ماشین برای تولید این محصولات وجود دارد که هزینه استفاده از هر کدام یک از آنها (C'') به ترتیب برابر است با ۱۰۰۰، ۹۰۰، ۱۱۰۰ و ۸۰۰ و حداکثر ظرفیت انبار جهت نگهداری موجودی ۱۲ واحد می باشد در جدول ۳ اطلاعات مربوط به نرخ تقاضا، نرخ تولید، هزینه خرید محصولات، هزینه تولید محصولات و هزینه نگهداری محصولات آمده است همچنین در جدول ۴ اطلاعات مربوط به هزینه کمبود، ordering cost، setup cost و حجم محصولات آمده است.

جدول ۳. پارامترهای مدل در مثال عددی

i	D_{it}			P_{it}			C_{it}			C'_{it}			h_{it}		
	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
۱	۱۸.۲	۱۹.۱	۱۱.۲	۱۵	۲۱۳	۱۵۴	۵۳	۵۲	۷۷	۵۵	۹۹	۵۰	۴۰	۲۰	۳۰
۲	۱۹.۲	۱۰.۳	۱۰.۹	۲۱۵	۵۹۰	۸	۸۹	۲۳	۵۶	۸۹	۳۱	۹۴	۳۸	۶	۴۹
۳	۱۲.۸	۱۵.۵	۱۹.۶	۲۰۴	۲۰۰	۲۹۲	۷۹	۷۳	۵۰	۵۴	۷۰	۶۳	۳۲	۱۵	۱۶
۴	۱۹.۷	۱۱.۵	۱۹.۸	۲۱۹	۱۷۰	۲۴۸	۶۷	۵۸	۹۰	۹۰	۷۲	۹۶	۲۰	۴۴	۲۰
۵	۱۹.۶	۱۴.۹	۱۸.۰	۲۷۸	۲۳۳	۲۱۵	۶۵	۷۶	۵۸	۵۹	۶۳	۵۷	۴۳	۱۹	۴۸
۶	۱۱.۴	۱۴.۲	۱۹.۲	۱۷۳	۱۹۸	۲۶۴	۸۰	۶۳	۸۳	۵۶	۹۴	۷۹	۲۴	۱۸	۲۰
۷	۱۸.۰	۱۹.۶	۱۶.۶	۲۵۷	۲۷۷	۲۰۸	۸۵	۸۸	۷۲	۷۸	۵۷	۹۳	۳۵	۲۹	۲۴
۸	۱۰.۳	۱۸.۵	۱۹.۴	۱۷۸	۲۵۸	۱۴	۵۴	۶۱	۹۶	۸۱	۶۷	۷۶	۴۴	۳۳	۳۲
۹	۱۶.۸	۱۷.۶	۱۷.۵	۱۳	۲۳۶	۲۷۲	۵۷	۹۲	۷۷	۷۰	۵۳	۶۲	۴۷	۲۱	۴۱
۱۰	۱۲.۹	۱۶.۶	۱۱.۷	۱۸۶	۲۳۳	۹	۱۰۰	۵۳	۷۲	۵۶	۵۹	۶۲	۴۰	۲۵	۳۳

جدول ۴. پارامترهای مدل در مثال عددی

i	π_{it}			A_{it}			A'_{it}			w_i			S_i
	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	
۱	۱۴۵	۱۲۰	۱۳۲	۷۰۹	۵۲۴	۹۵۲	۷۷۴	۶۴۸	۸۷۳	۲	۲	۳	۰.۰۸
۲	۱۳۵	۹۵۰۰	۱۳۳	۹۷۳	۲۳۰	۷۴۵	۵۹۴	۳۴۴	۵۹۱	۲	۵	۱	۰.۰۶
۳	۱۴۱	۱۱۴	۱۴۲	۶۶۹	۹۵۰	۶۸۴	۶۸۴	۸۱۳	۸۹۰	۲	۱	۲	۰.۰۹
۴	۱۳۸	۱۱۳	۱۳۳	۵۵۵	۸۹۰	۶۹۵	۵۴۰	۹۶۵	۸۸۸	۳	۲	۵	۰.۰۵
۵	۱۴۱	۱۲۲	۱۳۲	۶۲۱	۷۰۲	۵۴۸	۷۴۳	۷۱۸	۷۲۳	۳	۱	۵	۰.۰۳
۶	۱۲۳	۱۲۷	۱۰۱	۵۶۶	۹۷۱	۹۷۹	۶۵۳	۷۵۴	۷۵۵	۵	۳	۱	۰.۰۷
۷	۷۵۰	۱۳۰	۱۲۴	۷۸۸	۵۲۹	۶۱۷	۹۰۹	۸۹۸	۸۲۲	۲	۳	۳	۰.۰۶
۸	۱۲۹	۱۳۸	۱۳۳	۶۷۶	۹۱۱	۵۰۷	۶۸۹	۹۰۶	۷۶۶	۲	۴	۴	۰.۰۵
۹	۸۰۶	۱۳۱	۱۳۶	۵۲۱	۵۸۴	۸۲۵	۶۷۵	۹۷۰	۹۳۸	۲	۱	۲	۰.۰۴
۱۰	۱۱۴	۷۲۵	۱۳۱	۸۶۶	۸۲۴	۷۲۵	۷۷۵	۸۱۱	۷۹۴	۲	۳	۳	۰.۰۲

پس از تعیین پارامترهای مدل، با استفاده از الگوریتم SQP مدل پیشنهادی حل می‌شود. در ادامه اطلاعات بدست آمده از خروجی الگوریتم SQP گزارش می‌شود به طوری که در جدول ۵ اطلاعات مربوط به میزان خرید محصولات (Q) میزان تولید محصولات (O') میزان کمبود (b) و سطحی از موجودی که در آن اقدام به تولید کرده ایم (R) آورده شده است. در جدول ۶ اطلاعات مربوط به

حداکثر سطح موجودی (λ) و نیز مقداری از زمان در دسترس که به مقادیر T^P ، T^Q و T^D اختصاص داده شده است را نشان می‌دهد. همچنین جدول ۷ اطلاعات مربوط به نحوه تخصیص محصولات به ماشین‌ها جهت تولید (M) و نحوه مقدارگیری متغیرهای باینری y ، W^P و W^D را نشان می‌دهد در این جدول متغیرهای باینری y_{it}^j و M_{ikt} به صورت یک ماتریس دو بعدی نشان داده شده است برای مثال برای تولید محصول دوم در دوره دوم، ماشین سوم انتخاب شده است به این معنی که $M_{232} = 1$.

جدول ۵. متغیرهای مقداردهی شده با استفاده از روش SQP

I	Q_{it}			Q'_{it}			B_{it}			R_{it}		
	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳
۱	۱.۹۴۶۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۴.۲۷۱۷	۳.۹۹۷۷	۰.۰۰۰۰	۱۱.۹۸۲۲	۱۵.۱۰۲۳	۱۱.۲۰۰۰	۰.۹۹۲۲	-۸.۰۴۵۳	-۱۰.۵۴۰۳
۲	۰.۳۳۱۰	۴.۵۵۲۱	۱.۲۱۷	۶.۵۴۸۷	۵.۱۴۵۲	۲.۰۲۶۶	۱۲.۳۲۰۳	۰.۶۰۲۷	۷.۶۵۵۹	-۹.۵۰۸۸	-۲.۰۲۵۶	۰.۵۹۴۲
۳	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۱۲.۸۰۰۰	۱۵.۵۰۰۰	۱۹.۶۰۰۰	-۱۲.۰۱۹۹	-۱۴.۵۲۱۳	-۱۸.۲۶۸۰
۴	۰.۳۳۹۶	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۶.۷۱۹۲	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۱۲.۶۴۱۲	۱۱.۵۰۰۰	۱۹.۸۰۰۰	-۱۰.۸۸۸۰	-۱۰.۷۴۷۲	-۱۸.۲۶۵۳
۵	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۳۰۵	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۶.۰۴۶۰	۱۹.۶۰۰۰	۱۴.۹۰۰۰	۱۱.۶۴۸۴	-۱۸.۰۷۰۳	-۱۳.۸۴۱۰	-۹.۹۷۸۸
۶	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۱۱.۴۰۰۰	۱۴.۲۰۰۰	۱۹.۲۰۰۰	-۱۰.۵۱۶۹	-۱۳.۰۰۳۳	-۱۷.۳۳۴۳
۷	۰.۳۶۵۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۶.۳۶۲۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۱۱.۲۷۲۲	۱۹.۶۰۰۰	۱۶.۶۰۰۰	-۷.۵۸۲۰	-۱۸.۲۷۱۹	-۱۵.۵۳۴۸
۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۲.۱۶۷۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۳.۶۰۷۰	۱۰.۳۰۰۰	۱۸.۵۰۰۰	۱۳.۶۲۶۰	-۹.۶۹۸۳	-۱۷.۲۶۸۶	۱.۶۴۹۹
۹	۲.۱۲۷۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۳.۸۵۶۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۱۰.۸۱۶۲	۱۷.۶۰۰۰	۱۷.۵۰۰۰	۱.۷۰۵۵	-۱۶.۴۴۷۹	-۱۶.۳۴۶۷
۱۰	۰.۰۰۰۰	۰.۶۲۸۳	۱.۲۷۴۴	۰.۰۰۰۰	۷.۹۴۳۵	۲.۱۸۲۱	۱۳.۹۰۰۰	۸.۰۲۸۲	۸.۲۴۳۵	-۱۳.۰۴۳۳	-۶.۹۹۲۳	-۲.۱۷۲۱

جدول ۶. متغیرهای مقداردهی شده با استفاده از روش SQP

i	λ_{it}			T_{it}^Q			T_{it}^P			T_{it}^D		
	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳
۱	۱.۹۴۶۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۵۲۴	۰.۴۲۱۲	۰.۹۴۱۱	۰.۲۸۴۸	۰.۰۱۸۸	۰.۰۰۰۰	۰.۶۶۲۸	۰.۵۶۰۰	۰.۰۵۸۹
۲	۰.۳۳۱۰	۴.۵۵۲۱	۱.۲۱۷۵	۰.۵۱۲۵	۰.۶۳۸۶	۰.۰۵۷۲	۰.۰۳۰۵	۰.۰۰۸۷	۰.۲۵۳۳	۰.۴۵۷۱	۰.۳۵۲۷	۰.۶۸۹۵
۳	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۹۳۹۱	۰.۹۳۶۹	۰.۹۳۲۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۶۰۹	۰.۰۶۳۱	۰.۰۶۸۰
۴	۰.۳۳۹۶	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۵۶۹۹	۰.۹۳۴۵	۰.۹۳۲۵	۰.۰۳۰۷	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۳۹۹۴	۰.۰۶۵۵	۰.۰۷۷۵
۵	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۳۰۵۶	۰.۹۲۲۰	۰.۹۲۸۹	۰.۵۷۱۴	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۲۸۱	۰.۰۷۸۰	۰.۰۷۱۱	۰.۴۰۰۵
۶	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۹۲۲۵	۰.۹۱۵۷	۰.۹۰۲۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۷۷۵	۰.۰۸۴۳	۰.۰۹۷۲
۷	۰.۳۶۵۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۴۴۱۵	۰.۹۳۲۲	۰.۹۳۵۸	۰.۰۲۴۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۵۳۳۷	۰.۰۶۷۸	۰.۰۶۴۲
۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۲.۱۶۷۰	۰.۹۴۱۶	۰.۹۳۳۴	۰.۰۲۶۷	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۲۵۷۶	۰.۰۵۸۴	۰.۰۶۶۶	۰.۷۱۵۷
۹	۲.۱۲۷۸	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۲۵۱	۰.۹۳۴۵	۰.۹۳۴۱	۰.۲۹۶۶	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۶۷۸۲	۰.۰۶۵۵	۰.۰۶۵۹
۱۰	۰.۰۰۰۰	۰.۶۲۸۳	۱.۲۷۴۴	۰.۹۳۸۴	۰.۴۵۹۱	۰.۲۹۴۶	۰.۰۰۰۰	۰.۰۳۴۱	۰.۲۴۲۵	۰.۰۶۱۶	۰.۵۰۶۸	۰.۴۶۳۰

جدول ۷. متغیرهای مقداردهی شده با استفاده از روش SQP

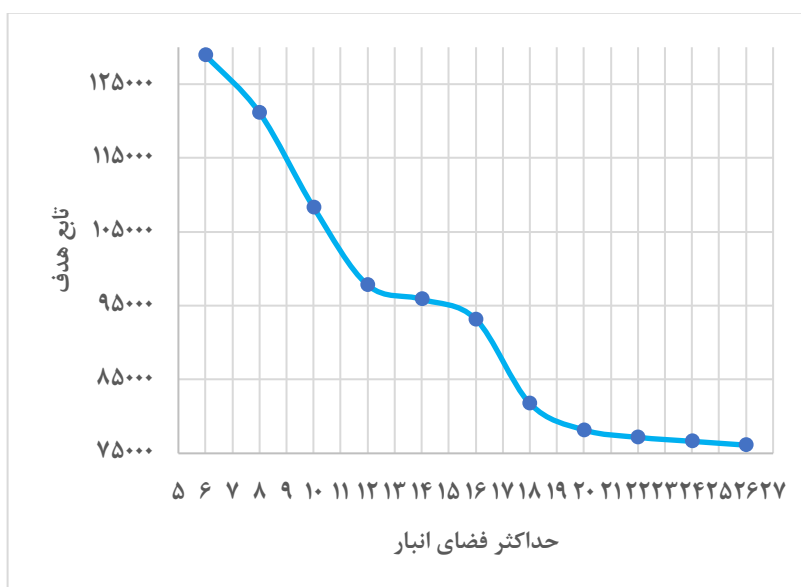
i	M_{it}			v_{it}^j			W_{it}^P			W_{it}^D		
	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳	t=۱	t=۲	t=۳
۱	۳	۳	۰	۳	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۲	۳	۳	۳	۲	۲	۳	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۳	۰	۰	۰	۲	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۴	۳	۰	۰	۲	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۱	۱
۵	۰	۰	۳	۲	۲	۲	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۶	۰	۰	۰	۲	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۷	۳	۰	۰	۲	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۱	۱
۸	۰	۰	۳	۲	۲	۳	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۹	۳	۰	۰	۳	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۱	۱
۱۰	۰	۳	۳	۲	۲	۵	۰	۱	۱	۱	۱	۱

۴-۲- تحلیل حساسیت

در این بخش، تجزیه و تحلیل حساسیت برای بررسی اثر حداکثر فضای انبار بر هزینه‌های مختلف تشکیل دهنده‌ی تابع هدف انجام می‌شود. برای این منظور مسئله تحت حداکثر فضای انبار بین ۶ تا ۲۶ واحد با استفاده از الگوریتم SQP حل شده است. در جدول ۸ هزینه‌های مختلف تشکیل دهنده‌ی تابع هدف گزارش شده است. شکل ۱۰ روند مقدار تابع هدف با استفاده از SQP را در حل مدل ریاضی پیشنهادی تحت مقادیر مختلف فضای انبار نشان می‌دهد.

جدول ۸. مقادیر بدست آمده از بخش‌های مختلف تابع هدف به ازای مقادیر مختلف F

F	TC	TPC	TOC	THC	TBC	TMC
۲۶	۷۶۱۱۱.۷۶۷۶	۴۸۷۲.۳۳۵۱	۴۴۲۳۹	۸۹.۳۶۳۴	۱۳۷۱۱.۰۶۹۱	۱۳۲۰۰
۲۴	۷۶۶۲۷.۲۸۸۴	۵۲۷۰.۰۸۶۹	۴۴۲۳۹	۱۱۶.۶۲۴۰	۱۳۸۰۱.۵۷۷۵	۱۳۲۰۰
۲۲	۷۷۱۶۵.۷۰۶۷	۲۵۸۱.۳۴۰۷	۴۴۲۳۹	۱۱۰.۷۷۳۵	۲۳۶۳۴.۵۹۲۵	۶۶۰۰
۲۰	۷۸۱۷۵.۶۸۳۳	۵۵۱۶.۴۶۲۸	۴۴۲۳۹	۷۴.۰۲۰۸	۱۵۱۴۶.۱۹۹۷	۱۳۲۰۰
۱۸	۸۱۷۶۳.۱۲۰۱	۵۲۰۷.۱۰۵۲	۴۴۲۳۹	۵۲.۹۵۹۴	۱۹۰۶۴.۰۵۵۵	۱۳۲۰۰
۱۶	۹۳۱۷۰.۸۵۹۵	۵۱۸۸.۱۷۶۰	۴۴۲۳۹	۵۴.۵۹۴۳	۲۷۱۸۹.۰۸۹۳	۱۶۵۰۰
۱۴	۹۵۸۷۲.۵۳۸۶	۲۳۶۸.۳۹۷۳	۴۴۲۳۹	۵۲.۸۰۴۵	۴۲۶۱۲.۳۳۶۸	۶۶۰۰
۱۲	۹۷۷۹۸.۵۲۳۵	۴۹۸۸.۵۷۱۴	۴۴۲۳۹	۲۶.۷۴۴۱	۳۵۳۴۴.۲۰۸۰	۱۳۲۰۰
۱۰	۱۰۸۳۲۰.۷۰۷۷	۲۰۴۳.۳۹۲۲	۴۴۲۳۹	۲۴.۴۳۵۶	۵۵۴۱۳.۸۸۹۹	۶۶۰۰
۸	۱۲۱۱۳۶.۲۸۷۴	۵۲۴.۰۶۱۰	۴۴۲۳۹	۰.۸۴۷۸	۶۹۷۷۲.۴۷۸۶	۶۶۰۰
۶	۱۲۸۹۲۳.۳۷۷۵	۵۱۸۴.۶۸۷۳	۴۴۲۳۹	۲.۹۴۶۳	۵۷۴۹۶.۷۴۳۹	۲۲۰۰۰



شکل ۱۰. تحلیل حساسیت مقدار تابع هدف بدست آمده از روش SQP بر اساس مقادیر مختلف حداکثر فضای انبار

نتایج عددی مدل پیشنهادی نشان می‌دهد که تصمیمات تولید، خرید و پذیرش کمبود به شدت تحت تأثیر محدودیت فضای انبار و نسبت نرخ تولید به نرخ تقاضا قرار دارند. به‌طور خاص، افزایش ظرفیت انبار موجب کاهش دفعات شروع تولید و کاهش میزان خرید از خارج شده و

در نتیجه هزینه‌های کل سیستم را کاهش می‌دهد. این یافته بیانگر آن است که سرمایه‌گذاری در توسعه ظرفیت انبار، در بسیاری از شرایط می‌تواند به‌عنوان یک تصمیم اقتصادی توجیه‌پذیر تلقی شود.

همچنین، نتایج مربوط به ۲۴ حالت مختلف دیاگرام سطح موجودی نشان می‌دهد که انتخاب نادرست سیاست موجودی می‌تواند منجر به افزایش قابل توجه هزینه‌ها گردد، در حالی که انتخاب حالت بهینه متناسب با شرایط تولید و تقاضا، امکان کاهش هزینه و افزایش بهره‌وری منابع را فراهم می‌آورد. این موضوع اهمیت استفاده از ابزارهای تحلیلی در طراحی سیاست‌های موجودی را برای مدیران برجسته می‌سازد. از منظر برنامه‌ریزی عملیاتی، مدل پیشنهادی نشان می‌دهد که هماهنگی میان برنامه تولید و سیاست‌های خرید نقش کلیدی در کنترل هزینه‌ها دارد. به‌ویژه، در شرایطی که ظرفیت ماشین‌ها محدود است، تصمیمات خرید می‌توانند به‌عنوان ابزاری برای جلوگیری از اضافه‌بار سیستم تولید مورد استفاده قرار گیرند. به‌طور کلی، بینش‌های مدیریتی استخراج‌شده از نتایج و تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که مدل ارائه‌شده می‌تواند به مدیران کمک کند تا تصمیمات خود را نه بر اساس شهود، بلکه مبتنی بر تحلیل کمی و سنجش اثرات متقابل متغیرهای کلیدی اتخاذ نمایند.

۵- کاربردهای مدیریتی و نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از مدل بهینه‌سازی پیشنهادی در این پژوهش می‌تواند به‌عنوان یک ابزار تصمیم‌یار مؤثر برای مدیران تولید و زنجیره تأمین مورد استفاده قرار گیرد. این مدل به مدیران امکان می‌دهد تا در محیط‌های چندمحصولی و چنددوره‌ای، به‌صورت همزمان درباره میزان تولید داخلی، مقدار خرید از خارج و سطح مجاز کمبود تصمیم‌گیری نمایند؛ به‌گونه‌ای که مجموع هزینه‌های سیستم حداقل شود.

از منظر برنامه‌ریزی تولید، مدل ارائه‌شده با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ماشین‌ها و تخصیص محصولات به ماشین‌های مختلف، به مدیران کمک می‌کند تا برنامه تولیدی واقع‌بینانه‌تری تنظیم کرده و از بروز تداخل در استفاده از منابع تولیدی جلوگیری نمایند. همچنین تعیین سطحی از موجودی که در آن تولید آغاز می‌شود، امکان زمان‌بندی بهینه شروع و توقف تولید را فراهم می‌آورد.

در حوزه مدیریت موجودی، در نظر گرفتن حالات مختلف دیاگرام سطح موجودی و امکان وقوع کمبود، این امکان را برای مدیران فراهم می‌کند تا سیاست‌های نگهداری موجودی و پذیرش کمبود را متناسب با شرایط تقاضا و تولید تنظیم نمایند. به‌ویژه، تحلیل ۲۴ حالت مختلف نشان می‌دهد که در چه شرایطی پذیرش کمبود می‌تواند از منظر هزینه‌ای توجیه‌پذیر باشد.

از منظر سیاست‌های خرید و برون‌سپاری، مدل پیشنهادی مشخص می‌سازد که در چه دوره‌ها و برای کدام محصولات، خرید از خارج نسبت به تولید داخلی گزینه مناسب‌تری است. این موضوع به مدیران خرید کمک می‌کند تا تصمیمات خود را مبتنی بر تحلیل کمی و نه صرفاً تجربه اتخاذ نمایند.

علاوه بر این، تحلیل حساسیت فضای انبار ارائه‌شده در پژوهش، دید روشنی از تأثیر محدودیت‌های فیزیکی بر هزینه‌های کل سیستم در اختیار مدیران قرار می‌دهد و می‌تواند مبنایی برای تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری در توسعه ظرفیت انبار یا اصلاح سیاست‌های موجودی باشد. به‌طور کلی، مدل ارائه‌شده می‌تواند به‌عنوان یک چارچوب تحلیلی برای پشتیبانی از تصمیم‌گیری‌های راهبردی و عملیاتی در بنگاه‌های تولیدی مورد استفاده قرار گیرد.

مدل پیشنهادی قابلیت پیاده‌سازی در سیستم‌های برنامه‌ریزی منابع سازمان (ERP) و سیستم‌های پشتیبان تصمیم‌گیری (DSS) را دارد و می‌تواند در صنایع تولیدی با تنوع محصول بالا مورد استفاده قرار گیرد.

در این تحقیق بر روی تعیین همزمان مقدار بهینه تولید و خرید در یک سیستم موجودی تحت فرضیات مشخص تمرکز شده است. هدف اصلی در این تحقیق ارائه خدمات مناسب و برای رضایت نیازهای مشتریان است. بر این اساس یک سیستم کنترل موجودی چند محصولی و چنددوره‌ای در شرایط تولید به همراه خرید با فرض پذیرش کمبود که برای نزدیک‌تر شدن مسئله به شرایط دنیای واقعی محدودیت انبار و تخصیص محصولات به ماشین‌ها نیز در نظر گرفته شده است، بهینه‌سازی شده است. بر اساس مفروضات ارائه شده، به طور کلی ۲۴ حالت

مختلف برای دیاگرام سطح موجودی قابل تعریف است که در این راستا انواع هزینه‌های وارد شده به سیستم کنترل موجودی تحت شرایط و زیر شرط‌های قابل رخداد برای دیاگرام سطح موجودی با در نظر گرفتن نرخهای تولید کمتر یا بیشتر از نرخ تقاضا فرموله شده و در یک مدل ریاضی یکپارچه ارائه شده است. بطور کلی در ۱۷ زیر شرط از ۲۴ زیر شرط ارائه شده، کمبود رخ می‌دهد. این مسئله به دلیل کاربردهای گسترده واقعی و پیچیدگی نظری، بسیار حائز اهمیت است. مدل پیشنهادی یک مدل mixed integer non-linear programming است. حل این مدلها با چالش‌های زیادی مواجه است. در این تحقیق برای حل مدل ریاضی پیشنهادی، از روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی (SQP) استفاده شده است که نتایج حاصل از آن گزارش شده است.

جهت توسعه تحقیقات مرتبط با این مقاله پیشنهاد می‌شود، نرخ‌های تولید و تقاضا به صورت تصادفی در نظر گرفته شود. همچنین بهره‌برداری از سایر الگوریتم ابتکاری و فراابتکاری جهت دستیابی به پاسخ‌های بهتر یکی دیگر از روشهای ارائه‌ی تحقیقات مرتبط می‌باشد. همچنین پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آتی، رویکردهایی برای کاهش پیچیدگی محاسباتی مدل مورد بررسی قرار گیرد. از جمله این رویکردها می‌توان به ساده‌سازی برخی فروض مدل، تجزیه مدل به زیرمسئله‌های قابل حل (مانند تفکیک تصمیمات تولید و موجودی)، و همچنین به‌کارگیری روش‌های حل تقریبی، ابتکاری و فراابتکاری اشاره نمود. استفاده از این روش‌ها می‌تواند ضمن حفظ دقت قابل قبول نتایج، زمان محاسباتی را کاهش داده و امکان به‌کارگیری مدل را در مسائل با ابعاد بزرگتر فراهم آورد.

منابع

- Ahmadi Tootkaleh, E. , Afshar Najafi, B. and Seifbarghi, M. (2024). Inventory Control of Perishable Products in a VMI System with the Ability of Replacing Unavailable Products: Stochastic Dynamic Programming Approach. *Journal of Industrial Management Perspective*, 14(2), 181-205.
- Balakrishnan, S. (1994). The dynamics of make-or-buy decisions. *European Journal of Operational Research*, 74, 552-571.
- Bassett, R. (1991, November). Make-or-buy decisions. *Management Accounting*, 58-59.
- Boggs, P. T., & Tolle, J. W. (1995). Sequential quadratic programming. *Acta Numerica*, 4, 1-51.
- Canez, L. E., Platts, K. W., & Probert, D. R. (2000). Developing a framework for make-or-buy. *International Journal of Operations and Production Management*, 20(11), 1313-1330.
- Cárdenas-Barrón, L. E. (2001). The economic production quantity (EPQ) with shortage derived algebraically. *International Journal of Production Economics*, 70, 289-292.
- Cárdenas-Barrón, L. E. (2011). The derivation of EOQ/EPQ inventory models with two backorders costs using analytic geometry and algebra. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 2394-2407.
- Chakrabarty, T., Giri, B. C., & Chaudhuri, K. S. (1998). An EOQ model for items with Weibull distribution deterioration, shortages and trended demand: An extension of Philip's model. *Computers & Operations Research*, 25, 649-657.
- Chang, C.-T., & Lo, T. Y. (2009). On the inventory model with continuous and discrete lead time, backorders and lost sales. *Applied Mathematical Modelling*, 33, 2196-2206.
- Chiu, Y. S. P., & Chiu, S. W. (2006). Determining the materials procurement policy based on the economic order/production models with backlogging permitted. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 30, 156-165.
- Chung, K.-J., & Cárdenas-Barrón, L. E. (2012). The complete solution procedure for the EOQ and EPQ inventory models with linear and fixed backorder costs. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(11-12), 2151-2156.
- Drake, M. J., Pentico, D. W., & Toews, C. (2011). Using the EPQ for coordinated planning of a product with partial backordering and its components. *Mathematical and Computer Modelling*, 53, 359-375.
- Ellis, G. (1993, November). Solving make-or-buy problems with linear programming. *Management Accounting*, 52-53.
- Fazel, F., Fischer, K. P., & Gilbert, E. W. (1998). JIT purchasing vs. EOQ with a price discount: An analytical comparison of inventory costs. *International Journal of Production Economics*, 54, 101-109.

15. Ford, W. H., & Farmer, D. (1986). Make-or-buy: A key strategic issue. *Long Range Planning*, 19(5), 52–53.
16. Ford, W. H., & Porter, H. F. (1915). Deciding whether to buy or to make. *Library Factory Management Supplement*, 3, 45–52.
17. García-Laguna, J., San-José, L. A., Sicilia, J., & Sierra, A. (2010). The integrality of the lot size in the basic EOQ and EPQ models: Applications to other production-inventory models. *Applied Mathematics and Computation*, 216(5), 1660–1672.
18. Hadley, G., & Whitin, T. M. (1963). *Analysis of inventory control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
19. Hadley, G., & Whitin, T. M. (1975). *An optimal final inventory model*. Prentice Hall.
20. Haksever, C., & Moussourakis, J. (2005). A model for optimizing multi-product inventory systems with multiple constraints. *International Journal of Production Economics*, 97(1), 18–30.
21. Harris, F. W. (1913). How many parts to make at once. *Factory Magazine and Management*, 10, 135–136.
22. Hassanpour, H. A., Fatahi, H. and Fahimi Sivaki, J. (2025). Inventory Planning and Activity Scheduling in The Supply Chain of Reconstruction Projects (Case Study: Sina Drilling Rig 1). *Journal of Industrial Management Perspective*, 15(1), 9-38.
23. Higgins, C. C. (1955, March–April). Make or buy re-examined. *Harvard Business Review*, 109–119.
24. Humphreys, P. K., Lo, V. H. Y., & McIvor, R. T. (2000). A decision support framework for strategic purchasing. *Journal of Materials Processing Technology*, 107, 353–362.
25. Humphreys, P. K., McIvor, R., & Huang, G. (2002). An expert system for evaluating the make or buy decision. *Computers & Industrial Engineering*, 42, 567–585.
26. Jafaripour, Z., Sajadi, S. M., Molana, S. M., Moghadam, F., & Ave, N. K. (2019). The integration of an inventory model and sales decisions in a two-level supply chain for small and medium-sized enterprises with the allowance of rework and backorders for new products with the sensitivity of the demand to price.
27. Kazemi, N., Ehsani, E., & Jaber, M. Y. (2010). An inventory model with backorders with fuzzy parameters and decision variables. *International Journal of Approximate Reasoning*, 51, 964–972.
28. Khalilpourazari, S., & Pasandideh, S. H. R. (2018). Multi-objective optimization of multi-item EOQ model with partial backordering and defective batches and stochastic constraints using MOWCA and MOGWO. *Operational Research*, 1–33.
29. Khalilpourazari, S., & Pasandideh, S. H. R. (2019). Modeling and optimization of multi-item multi-constrained EOQ model for growing items. *Knowledge-Based Systems*, 164, 150–162.
30. Khalilpourazari, S., Mirzazadeh, A., Weber, G. W., & others. (2019). A robust fuzzy approach for constrained multi-product economic production quantity with imperfect items and rework process. *Optimization*, 1–28.
31. Khalilpourazari, S., Pasandideh, S. H. R., & Ghodratnama, A. (2018). Robust possibilistic programming for multi-item EOQ model with defective supply batches: Whale optimization and water cycle algorithms. *Neural Computing and Applications*, 1–28.
32. Khalilpourazari, S., Pasandideh, S. H. R., & Niaki, S. T. A. (2016). Optimization of multi-product economic production quantity model with partial backordering and physical constraints: SQP, SFS, SA, and WCA. *Applied Soft Computing*, 49, 770–791.
33. Khalilpourazari, S., Pasandideh, S. H. R., & Niaki, S. T. A. (2019). Optimizing a multi-item economic order quantity problem with imperfect items, inspection errors, and backorders. *Soft Computing*, 1–28.
34. Klein Haneveld, W. K., & Teunter, R. H. (1998). Effects of discounting and demand rate variability on the EOQ. *International Journal of Production Economics*, 54, 173–192.
35. Lewis, C. D. (1998). Establishing a practical range of price discounts that should be aimed for when purchasing more than the EOQ. *European Journal of Purchasing & Supply Management*, 4, 153–162.
36. Li, J., Wang, S., & Cheng, T. C. E. (2008). Analysis of postponement strategy by EPQ-based models with planned backorders. *Omega*, 36, 777–788.

37. Lu, C., Ye, Y., & Shi, Z. (2025). Optimization of semi-finished inventory management in process manufacturing: A multi-period delayed production model. *Systems*, 13(10), 879.
38. Matsuyama, K. (2001). The EOQ-models modified by introducing discount of purchase price or increase of setup cost. *International Journal of Production Economics*, 73, 83–99.
39. Moghimi Shahri, B., Khatami Firouzabadi, A., Amiri, M. and Azimi, P. (2024). A Simulation-Based Bi-Objective Optimization Model for Supply Chain Inventory Replenishment: A Case Study of the Electric Industry. *Journal of Industrial Management Perspective*, 14(3), 236-260.
40. Nadoor, E. (1965). *Inventory systems*. New York: John Wiley and Sons.
41. Neghab, M. A. P., & Poormoaiied, S. (2011). Optimum quantities of make and buy in multi-item manufacturing firms with restriction in production capacity. In 2011 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM) (pp. 313–317). IEEE.
42. Pasandideh, S. H. R., Niaki, S. T. A., & Ashouri, H. (2010). A parameter-tuned genetic algorithm for multi-product economic production quantity model with space constraint, discrete delivery orders and shortages. *Advances in Engineering Software*, 41(2), 306–314.
43. Pasandideh, S. H. R., Niaki, S. T. A., & Mirhosseyni, S. H. (2010). A parameter-tuned genetic algorithm to solve multi-product economic production quantity model with defective items, rework, and constrained space. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 49, 827–837.
44. Pasandideh, S., Niaki, S. T. A., & Mirhosseyni, S. M. (2010). A parameter-tuned genetic algorithm for multi-product economic production quantity model with space constraint, discrete delivery orders and shortages. *Advances in Engineering Software*, 41(2), 306–314.
45. Pentico, D. W., Drake, M. J., & Toews, C. (2009). The deterministic EPQ with partial backordering: A new approach. *Omega*, 37(3), 624–636.
46. Pirayesh, M., & Poormoaiied, S. (2015). GPSO-LS algorithm for a multi-item EPQ model with production capacity restriction. *Applied Mathematical Modelling*, 39(16), 5011–5032.
47. Raunick, D. A., & Fisher, A. G. (1972). A probabilistic make-buy model. *Journal of Purchasing*, 8(1), 63–80.
48. Salameh, M. K., & Jaber, M. Y. (2000). Economic production quantity model for items with imperfect quality. *International Journal of Production Economics*, 64, 59–64.
49. Sari, L. K., Dur, S., & Husein, I. (2020). Using of EOQ and EPQ methods in minimizing inventory cost of crude palm oil. *ZERO: Jurnal Sains, Matematika dan Terapan*, 4(1), 36–43.
50. Sharifi, M., Cheragh, G., Dashti Maljahi, K., Zaretab, A., & Shahriari, M. (2021). Reliability and cost optimization of a system with k-out-of-n configuration and choice of decreasing the components failure rates. *Scientia Iranica*, 28(6), 3602-3616.
51. Taleizadeh, A. A., Aryanezhad, M. B. G., & Makoe, A. (2010). Utilization of simulated annealing in optimization of a multi-product inventory control model with stochastic replenishment and space constraint. *International Journal of Industrial Engineering and Production Management*, 20(2), 1–10.
52. Taleizadeh, A. A., Niaki, S. T. A., & Seyedjavadi, S. M. H. (2012). Multi-product multi-chance-constraint stochastic inventory control problem with dynamic demand and partial back-ordering: A harmony search algorithm. *Journal of Manufacturing Systems*, 31, 204–213.
53. Tavan, E., & Sajadi, S. M. (2021). Simultaneous selection of suppliers and determining inventory policy of multi-product uncertain supply chains with simulation-based optimization approach. *Sharif Journal of Industrial Engineering & Management*.
54. Vaziri, S., Zaretab, A., Esmacili, M., & Niaki, S. T. A. (2018). An integrated production and procurement design for a multi-period multi-product manufacturing system with machine assignment and warehouse constraint. *Applied Soft Computing*, 70, 238–262.
55. Wang, T.-Y., & Hu, J.-M. (2008). An inventory control system for products with optional components under service level and budget constraints. *European Journal of Operational Research*, 189, 41–58.