



A Markov-Based Algorithm for Determining the Optimal Project Due Date in PERT Networks considering Non-Renewable Resources

Hamed Amrollahi*^{ID}
Saeed Yaghoubi**^{ID}
Mohammad Sadeghi***^{ID}

Extended Abstract

Introduction and Objectives. Project management under uncertainty, particularly when facing discontinuous resource constraints, represents one of the fundamental challenges in project planning. In real project environments, fluctuations in activity durations and resource shortages frequently lead to deviations from predetermined schedules and increased operational costs. These challenges are more evident in time-sensitive projects such as construction projects, new product development, and research initiatives. The primary objective of this research is to develop an analytical framework for assessing the probability of timely project completion across different time intervals and utilizing this assessment to determine the most favorable project termination time with maximum economic benefit. This study seeks to address the fundamental question of how to establish project delivery deadlines that minimize delay costs while enabling early utilization, despite uncertainties in activity durations and discrete resource limitations.

Methods. The current research employs an enhanced critical path network modeling approach. In this model, activity durations are defined as probabilistic variables with specified distributions. The resources required for activity execution are considered non-renewable and are allocated to the project at predetermined intervals. For analyzing the temporal behavior of projects, discrete-time stochastic processes have been utilized. This approach enables the examination of various project states at distinct time points and calculates the probability of project completion at each time interval. Subsequently, an algorithm has been developed to identify all possible project progress states and compute the project completion probability function at each time point. Additionally, a combined cost-benefit optimization function has been developed that considers the probability of project completion at different times, calculating both delay-induced costs and benefits from early completion. The optimal project termination time is determined through analysis of this function, aiming to maximize net profit from on-time or early project delivery.

Received: May. 25, 2025; Revised: Oct. 23, 2025; Accepted: Feb. 05, 2026; Published Online: Feb. 07, 2026.

* M.Sc. Student., School of Industrial Engineering, Iran University Science & Technology, Tehran, Iran.

** Associate Prof., School of Industrial Engineering, Iran University Science & Technology, Tehran, Iran.

Corresponding Author: yaghoubi@iust.ac.ir

*** MSc., School of Industrial Engineering, Iran University Science & Technology, Tehran, Iran.



Findings. Results from implementing the model on various project samples indicate that resource allocation scheduling significantly impacts the probability of timely project completion. Analysis of the project completion probability function revealed that in certain resource distribution scenarios, the probability of on-time completion increases substantially, leading to reduced delay costs and increased benefits from early delivery. Case studies demonstrated that in many instances, selecting a delivery time slightly different from the median completion probability time can result in significant financial performance improvement. For example, in one examined project, choosing a delivery time just 5% earlier than the median time led to a 15% increase in net project profit. Comparison of different resource allocation scenarios showed that the proposed approach can serve as an effective decision-making tool at various managerial levels. The research also established that combining project completion probability analysis with economic optimization provides a comprehensive solution for determining optimal project delivery times.

Conclusion. The model presented in this research offers a novel approach for analyzing projects under conditions of resource and activity duration uncertainty. By employing stochastic processes and the proposed algorithm, the model enables determination of optimal project termination times based on economic profit maximization. Findings indicate that this framework can serve as an effective tool for project managers in establishing realistic and economically sound delivery deadlines. Future research should focus on extending this model by incorporating qualitative factors influencing project management.

Keywords: Reliability; Markov chain; Project Scheduling; Non-renewable Resources; Deadline; Cost-Reward Function.

How to Cite: Amrollahi, Hamed; Yaghoubi, Saeed; Sadeghi, Mohammad (2025). A Markov-Based Algorithm for Determining the Optimal Project Due Date in PERT Networks considering Non-Renewable Resources. *Ind. Manag. Persp.*, 15(4), 253-279 (In Persian).



ارائه یک الگوریتم مبتنی بر مدل مارکوفی جهت تعیین بهینه موعد مقرر تحویل پروژه در شبکه‌های پرت با منابع تجدیدناپذیر

حامد امراللهی^{ID*}
سعید یعقوبی^{ID**}
محمد صادقی^{ID***}

چکیده گسترده

مقدمه و اهداف. برنامه‌ریزی پروژه‌ها، به ویژه با وجود عدم قطعیت زمانی و محدودیت منابع، یکی از چالش‌های اساسی مدیریت پروژه است. این نوسانات اغلب منجر به انحراف از برنامه‌ها و افزایش هزینه‌های عملیاتی می‌شود. هدف اصلی این پژوهش، ارائه چارچوبی تحلیلی برای ارزیابی احتمال تکمیل به موقع پروژه و تعیین زمان بهینه خاتمه آن با بیشینه‌سازی سود اقتصادی است. این مطالعه به دنبال پاسخی برای این پرسش است که چگونه می‌توان زمان تحویل پروژه را طوری مشخص کرد که هزینه‌های تأخیر حداقل شده و بهره‌برداری زودرس امکان‌پذیر باشد.

روش‌ها. پژوهش حاضر از روش مدل‌سازی شبکه‌ای با استفاده از تکنیک مسیر بحرانی توسعه‌یافته بهره‌برده است. در این مدل، مدت زمان انجام فعالیت‌ها به صورت متغیرهای احتمالی با توزیع‌های مشخص تعریف شده‌اند. منابع مورد نیاز برای اجرای فعالیت‌ها از نوع غیرقابل جایگزین در نظر گرفته شده‌اند که در فواصل زمانی معین به پروژه اختصاص می‌یابند. برای تحلیل رفتار زمانی پروژه، از فرآیندهای تصادفی گسسته‌زمان استفاده شده است. این رویکرد امکان بررسی وضعیت‌های مختلف پروژه در لحظات زمانی مجزا و محاسبه احتمال اتمام پروژه در هر مقطع زمانی را فراهم می‌سازد. در ادامه، الگوریتمی طراحی شده که کلیه حالت‌های ممکن پیشرفت پروژه را شناسایی و تابع احتمال اتمام پروژه را در هر زمان محاسبه می‌کند. همچنین تابعی برای بهینه‌سازی ترکیبی هزینه و سود توسعه داده شده که با در نظر گرفتن احتمال اتمام پروژه در زمان‌های مختلف، هم هزینه‌های ناشی از تأخیر و هم منافع حاصل از تکمیل زودتر پروژه را محاسبه می‌نماید. انتخاب زمان بهینه پایانی پروژه با هدف بیشینه‌سازی سود خالص ناشی از تحویل به موقع یا زودتر از موعد، از طریق تحلیل این تابع انجام پذیرفته است.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۰۴، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۸/۰۱، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۱۶، تاریخ اولین انتشار: ۱۴۰۴/۱۱/۱۸.

* دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مدیریت پروژه، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.
** دانشیار، گروه لجستیک و زنجیره تامین، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

نویسنده مسئول: yaghoubi@iust.ac.ir

*** کارشناسی ارشد، گروه لجستیک و زنجیره تامین، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

نوع مقاله: پژوهشی

یافته‌ها. نتایج حاصل از اجرای مدل بر روی نمونه‌های مختلف پروژه‌ای نشان می‌دهد که زمان‌بندی تخصیص منابع تأثیر قابل توجهی بر احتمال تکمیل به موقع پروژه دارد. تحلیل تابع احتمال اتمام پروژه نشان داد که در برخی سناریوهای توزیع منابع، احتمال تکمیل پروژه در موعد مقرر به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابد که این امر منجر به کاهش هزینه‌های تأخیر و افزایش سود ناشی از تحویل زودتر می‌شود. مطالعات موردی انجام‌شده حاکی از آن است که در بسیاری از موارد، انتخاب زمان تحویلی که اندکی متفاوت از زمان میانه احتمال اتمام باشد، می‌تواند منجر به بهبود چشمگیر در بازدهی مالی پروژه گردد. به عنوان مثال، در یکی از پروژه‌های مورد بررسی، انتخاب زمان تحویل تنها ۵ درصد زودتر از زمان میانه، منجر به افزایش ۱۵ درصدی سود خالص پروژه شده است. مقایسه سناریوهای مختلف تخصیص منابع نشان داد که رویکرد پیشنهادی می‌تواند به عنوان ابزاری کارآمد در سطوح مختلف تصمیم‌گیری مدیریتی مورد استفاده قرار گیرد. همچنین مشخص شد که ترکیب تحلیل احتمال اتمام پروژه با بهینه‌سازی اقتصادی، راهکاری جامع برای تعیین زمان تحویل بهینه پروژه ارائه می‌دهد.

نتیجه‌گیری. مدل ارائه‌شده در این تحقیق، رویکردی نوین برای تحلیل پروژه‌ها در شرایط عدم قطعیت منابع و زمان فعالیت‌ها فراهم کرده است. با بهره‌گیری از فرآیندهای تصادفی و الگوریتم پیشنهادی، این مدل امکان تعیین زمان بهینه اتمام پروژه بر اساس بهینه‌سازی سود اقتصادی را ممکن ساخته است. یافته‌ها نشان می‌دهند که این چارچوب می‌تواند به عنوان ابزاری مؤثر برای مدیران پروژه در تعیین زمان‌های تحویل واقع‌بینانه و اقتصادی مورد استفاده قرار گیرد. پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آتی، این مدل با در نظر گرفتن عوامل کیفی مؤثر بر مدیریت پروژه توسعه داده شود.

کلیدواژه‌ها: قابلیت اطمینان؛ زنجیره مارکوف؛ زمان‌بندی پروژه؛ منابع تجدیدناپذیر؛ موعد مقرر تحویل؛ تابع هزینه پاداش.

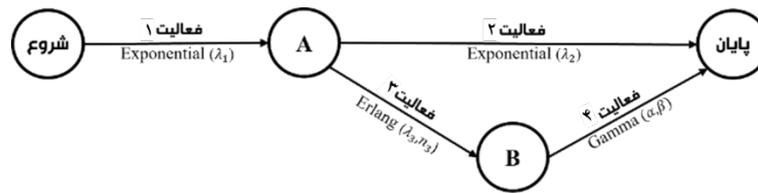
استناددهی: امراللهی، حامد؛ یعقوبی، سعید؛ صادقی، محمد (۱۴۰۴). ارائه یک الگوریتم مبتنی بر مدل مارکوفی جهت تعیین بهینه موعد مقرر تحویل پروژه در شبکه‌های پرت با منابع تجدیدناپذیر. چشم‌انداز مدیریت صنعتی، ۱۵(۴)، ۲۷۹-۲۵۳.



۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، با افزایش رویکرد پروژه‌محور در سازمان‌ها، فعالیت‌ها و اقدامات بر مبنای پروژه‌ها سازماندهی می‌شوند. پروژه‌ها به‌عنوان تلاش‌های موقتی با هدف تولید یک محصول، خدمت، یا نتیجه منحصر به فرد تعریف می‌شوند و با هدف دستیابی به یک هدف خاص یا تولید یک محصول خاص اجرا می‌گردند [۸، ۲۲]. این پروژه‌ها معمولاً با آغاز و پایان معین مشخص می‌شوند و توسط تیم‌های کاری در زمان و مکان خاصی انجام می‌گیرند [۱۶، ۳۲]. پروژه‌های ساخت و ساز با فرآیندهای منظم ساخت، بازسازی و نوسازی، زیرساخت‌های فیزیکی کشور را ارتقا داده و شاخص‌های اصلی ارزیابی آن‌ها شامل زمان، هزینه و کیفیت می‌باشد [۱، ۹]. با استفاده از اصول مدیریت پروژه و بهره‌گیری از دانش، مهارت، ابزار و تکنیک‌های موجود، می‌توان به اهداف تعیین شده در پروژه دست یافت. هر پروژه شامل واحدها و وظایف مختلفی است که یکی از این واحدها، واحد مدیریت و کنترل پروژه می‌باشد که مسئول نظارت بر عملکرد سایر واحدها و پیشرفت فعالیت‌های محوله به آنها است. این نظارت عمدتاً از طریق مدیریت زمان پروژه صورت می‌گیرد. تعیین زمان تحویل پروژه یکی از چالش‌های اساسی مدیریت پروژه است، به‌ویژه در شرایطی که عدم قطعیت‌ها و تغییرات ممکن است بر برنامه‌ریزی تأثیرگذار باشند. در این راستا، تعیین موعد مقرر تحویل پروژه در ابتدای قرارداد، با توجه به عدم قطعیت‌های موجود، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۲]. این موعد مقرر می‌تواند منجر به هزینه‌های اضافی یا پاداش‌هایی گردد. بنابراین، مدیریت مؤثر زمان تحویل پروژه برای دستیابی به اهداف زمانی و اقتصادی پروژه بسیار حیاتی است [۳]. در هر پروژه، هر جزئی که نیاز به صرف زمان، هزینه و منابع دارد، فعالیت نامیده می‌شود و هر فعالیت دارای روابط پیش‌نیازی و پس‌نیازی است که شامل تاریخ‌های شروع و پایان می‌باشد [۴].

با این حال، اگر مدت زمان این فعالیت‌ها تحت تأثیر شرایط واقعی قرار گیرد، برنامه‌ریزی پروژه با چالش‌هایی مواجه می‌شود. عدم قطعیت‌ها و تغییرات در پروژه‌ها غالباً منجر به تأخیر زمانی و افزایش هزینه‌ها می‌شوند و در صورت عدم وجود فرآیند رسمی و علمی برای مدیریت تغییرات، می‌توانند به اختلافات قراردادی و در نهایت شکست پروژه منجر شوند [۵]. با توجه به نوع قرارداد و جزئیات پروژه، از جمله طراحی، ارتباطات، وظایف و مسئولیت‌ها، برنامه‌ریزی منابع و تعیین زمانبندی، زمان مشخص شده برای تحویل پروژه در قرارداد به‌عنوان زمان اتمام پروژه یا موعد مقرر در نظر گرفته می‌شود. در واقع، مهم‌ترین شاخص موفقیت یک پروژه، علاوه بر دستیابی به اهداف و مقرون به صرفه بودن، اتمام آن در زمان پیش‌بینی شده است [۶]. یکی از ابزارهای رایج برای تهیه برنامه زمان‌بندی پروژه و مجموعه فعالیت‌های آن، استفاده از روش‌های شبکه‌ای مانند روش مسیر بحرانی است [۷]. در این روش، تمامی فعالیت‌ها و زمان‌های اجرای آن‌ها به دقت تعیین می‌شود و مسیر بحرانی به‌عنوان مسیر با طولانی‌ترین زمان پیش‌بینی شده شناخته می‌شود. با توجه به مدت زمان، ارتباطات و وابستگی‌های بین فعالیت‌ها، روش مسیر بحرانی زمان‌های زودترین و دیرترین شروع و پایان هر فعالیت را به‌طور قطعی محاسبه می‌کند و بر محاسبه زمان‌های شناوری و انعطاف‌پذیری در زمان اجرای فعالیت‌ها تمرکز دارد [۱۰]. در صورتی که زمان انجام فعالیت‌ها به‌طور قطعی مشخص نباشد و به‌جای آن از تابع توزیع احتمالی پیروی کند، شبکه به یک شبکه پرت احتمالی تبدیل می‌شود. شبکه پرت احتمالی، یک گراف جهت‌دار و همبند است که دارای یک گره شروع و یک گره پایان می‌باشد. در این نوع شبکه‌ها، مدت زمان انجام فعالیت‌ها به‌عنوان متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های مشخص در نظر گرفته می‌شود [۱۲]. شبکه‌های پرت احتمالی مدل‌های مفیدی برای مدیریت و کنترل پروژه‌های واقعی هستند و با وجود اینکه سال‌ها از معرفی شبکه پرت می‌گذرد، هنوز هم تحقیقات زیادی در این زمینه انجام می‌شود [۱۱]. در شبکه‌های پرت، با وجود آشنایی با فعالیت‌ها و روابط پیش‌نیاز و پس‌نیاز بین آن‌ها، زمان اجرای هر فعالیت به‌طور احتمالی مشخص می‌شود. به‌ویژه در پروژه‌های ساختمانی، جایی که زمان دقیق انجام هر بخش از پروژه مشخص نیست و به‌دلیل مسائل مطرح شده، زمان به‌صورت احتمالی در نظر گرفته می‌شود. در مثال زیر فرض شده است که با استفاده از روابط بین فعالیت‌ها و تابع توزیع هر فعالیت، نمودار شبکه پرت طبق شکل ۱ ترسیم خواهد شد.



شکل ۱. نمودار شبکه پروژه و انجام هر فعالیت بر اساس تابع توزیع مشخص شده.

این شبکه‌ها تنها زمانی قابل ترسیم هستند که منابع و موجودی‌های مورد نیاز هر فعالیت، شامل منابع تجدیدناپذیر و همچنین ماشین‌آلات و نیروی انسانی که به‌عنوان منابع تجدیدپذیر شناخته می‌شوند، به‌درستی تخصیص یافته و مشکلی در کمبود منابع وجود نداشته باشد. در این شرایط، می‌توان شبکه‌ها را ترسیم کرده و با استفاده از توابع توزیع هر فعالیت، زمان پایان پروژه را با دقت بیشتری پیش‌بینی کرد. در این پژوهش با در نظر گرفتن میزان موجودی و افزودن آن به‌عنوان شرطی لازم برای اجرای فعالیت‌های پروژه، به بررسی این موضوع پرداخته شده است که با چه احتمالی پروژه در زمان مشخص شده در قرارداد به اتمام خواهد رسید. منابع مورد استفاده در پروژه‌ها به دو دسته تجدیدپذیر و تجدیدناپذیر تقسیم می‌شوند [۱۱]. منابع تجدیدپذیر منابعی هستند که پس از اتمام یک فعالیت، ظرفیت آن‌ها آزاد شده و می‌توانند به فعالیت‌های دیگر پروژه اختصاص یابند؛ به عبارت دیگر، مصرف نمی‌شوند. به عنوان مثال، ماشین‌آلات سنگین (مانند جرثقیل یا بیل مکانیکی) یا نیروی انسانی متخصص (مانند یک تیم جوشکار ماهر) منابع تجدیدپذیر هستند. در هر بازه زمانی (مثلاً روزانه)، ظرفیت مشخصی از آن‌ها در دسترس است (مثلاً ۲ جرثقیل در روز). در مقابل، منابع تجدیدناپذیر که در این پژوهش موجودی نیز نامیده می‌شوند، منابعی هستند که پس از استفاده در یک فعالیت، مصرف شده و تمام می‌شوند و نمی‌توانند برای فعالیت‌های دیگر مورد استفاده قرار گیرند. مثال‌های بارز این منابع، مواد اولیه (مانند سیمان، آجر، فولاد) و بودجه مالی پروژه هستند. این منابع به صورت یک انبار یا موجودی کل در نظر گرفته می‌شوند [۱۳]. جایگاه این مفاهیم در پژوهش حاضر از اهمیت بالایی برخوردار است. در حالی که بسیاری از مدل‌ها بر مدیریت منابع تجدیدپذیر (ماشین‌آلات) تمرکز دارند، این تحقیق به چالش پیچیده‌تر، یعنی مدیریت منابع تجدیدناپذیر (مواد اولیه) می‌پردازد که طبق قرارداد در فواصل زمانی مشخص و به صورت دسته‌های به پروژه تزریق می‌شوند. این محدودیت مصرفی و نحوه ورود گسسته منابع، هسته اصلی مدل‌سازی مارکوفی و تحلیل قابلیت اطمینان در این پژوهش است. این تحلیل به مفهوم قابلیت اطمینان برنامه‌ریزی پروژه مرتبط است، که به توانایی برنامه برای تحقق اهداف زمانی تحت شرایط عدم قطعیت اشاره دارد. در ادبیات علمی، قابلیت اطمینان به ویژگی یک سیستم یا مؤلفه گفته می‌شود که امکان ارزیابی احتمال انجام موفقیت‌آمیز یک مأموریت یا وظیفه را در بازه‌ای مشخص از زمان و تحت شرایط از پیش تعریف‌شده فراهم می‌سازد [۱۴]. در این چارچوب، احتمال اتمام پروژه در تاریخ مقرر قرارداد به‌عنوان قابلیت اطمینان زمانی پروژه تعریف شده و تابع قابلیت اطمینان به‌صورت رابطه‌ای ریاضی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(T) = 1 - F(T) = P(T \geq t) \quad \text{رابطه (۱)}$$

که در آن، $R(T)$ تابع قابلیت اطمینان پروژه است، یعنی احتمال اینکه پروژه در زمانی بیش‌تر یا مساوی t به پایان برسد. $F(T)$ تابع توزیع تجمعی مدت زمان اتمام پروژه است و همچنین $P(T \geq t)$ احتمال اتمام پروژه در زمانی بیش‌تر یا مساوی t می‌باشد. در این رابطه، T متغیر تصادفی مدت زمان اتمام پروژه است. تابع $R(T)$ معیاری برای سنجش احتمال دستیابی به زمان مقرر در شرایط عدم قطعیت محسوب می‌شود. تابع قابلیت اطمینان همچنین می‌تواند به‌صورت رابطه (۲) نیز بیان شود:

$$R(T) = P(t \geq T) = \int_T^{\infty} f(t) dt \quad \text{رابطه (۲)}$$

که در این رابطه، $f(t)$ تابع چگالی احتمال است که توزیع متغیر تصادفی T را مشخص می‌کند. همان طور که بیان شد، مفهوم قابلیت اطمینان به عنوان احتمال اتمام پروژه در زمان تعیین شده در قرارداد تعریف می‌شود؛ آن هم با در نظر گرفتن برنامه‌ریزی مبتنی بر سیاست سفارش‌دهی موجودی و تخصیص منابع تجدیدپذیر. در روش‌های سنتی مدیریت پروژه، نبود برنامه‌ریزی دقیق برای تأمین منابع، اغلب موجب افزایش هزینه‌ها و طولانی شدن زمان اجرای پروژه می‌شد. به همین دلیل، ادغام مفاهیم مدیریت زنجیره تأمین با برنامه‌ریزی پروژه، به‌ویژه در پروژه‌های ساخت‌وساز، برای افزایش بهره‌وری و کاهش ریسک تأخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱۵]. همچنین، هماهنگی با تأمین‌کنندگان و تضمین تأمین به‌موقع مواد اولیه، نه تنها هزینه‌ها را کاهش می‌دهد، بلکه پیشبرد پروژه را نیز تسهیل می‌کند [۱۷]. در این تحقیق، سیاست سفارش موجودی از نوع اندازه دسته‌ای در نظر گرفته شده است؛ بدین معنا که در هر مرحله، مقدار مشخصی از موجودی به محل پروژه ارسال می‌شود. به‌عنوان نمونه، فرض کنید پروژه‌ای به چهار واحد موجودی نیاز دارد و تأمین‌کننده طبق قرارداد متعهد شده است که در دو نوبت، یکی در ابتدای پروژه و دیگری در میانه آن، هر بار دو واحد موجودی ارسال کند. چنین سیاستی تحت عنوان «سفارش دسته‌ای» شناخته می‌شود. با توجه به محدودیت موجودی و روابط تقدم و تأخر میان فعالیت‌ها، آغاز برخی فعالیت‌ها ممکن است به تأخیر بیفتد و این فعالیت‌ها در صف انتظار باقی بمانند تا منابع موردنیاز تأمین گردد. در این حالت، شرط آغاز فعالیت تنها به پیش‌نیازهای فنی محدود نمی‌شود، بلکه فراهم بودن منابع نیز الزامی است. برای مدل‌سازی این وضعیت، از فرایندهای مارکوفی استفاده شده است. فرایند مارکوف یکی از ابزارهای قدرتمند در تحلیل سیستم‌های تصادفی است که در آن، وضعیت آینده تنها به وضعیت فعلی وابسته است و مستقل از تاریخچه گذشته می‌باشد [۱۸]. این خاصیت، که تحت عنوان «خاصیت مارکوف» شناخته می‌شود، امکان مدل‌سازی دقیق سیستم‌هایی را فراهم می‌سازد که دارای دینامیک حالت‌محور هستند [۱۹]. در چارچوب این پژوهش، سیستم پروژه به‌صورت مجموعه‌ای از وضعیت‌های ممکن تعریف می‌شود که هر وضعیت مشخص‌کننده سطح موجودی، تخصیص منابع و پیشرفت فعالیت‌ها در زمان مشخصی است. برای تحلیل این مدل، ابتدا فضای حالت تعریف می‌شود که شامل ویژگی‌هایی نظیر مقدار موجودی تزیق شده، منابع تخصیص‌یافته، وضعیت اجرای فعالیت‌ها و دیگر پارامترهای مرتبط است. سپس با استفاده از نمودار انتقال حالت، که نشان‌دهنده تغییرات بین وضعیت‌های مختلف است، زنجیره مارکوف متناظر با سیستم شکل می‌گیرد. این زنجیره به ما امکان می‌دهد تا احتمال گذار بین وضعیت‌ها را محاسبه کرده و درنهایت، تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه را استخراج کنیم. استفاده از فرایند مارکوفی، به‌ویژه در شرایطی که منابع به‌صورت گسسته در زمان‌های معین وارد پروژه می‌شوند، مدلی واقع‌گرایانه و تحلیلی برای بررسی رفتار احتمالی پروژه فراهم می‌آورد. در این پژوهش، ابتدا شبکه فعالیت‌های پروژه مدل‌سازی شده و سپس حالت‌های ممکن سیستم در هر بازه زمانی تعریف می‌شوند؛ به‌گونه‌ای که وضعیت پروژه در هر لحظه، تابعی از میزان منابع موجود، فعالیت‌های تکمیل‌شده، و فعالیت‌های در صف اجرا است. با ساختاردهی این حالت‌ها و ترسیم نمودار انتقال، زنجیره مارکوفی متناظر با پروژه به‌دست می‌آید که امکان تحلیل دقیق رفتار احتمالاتی پروژه را فراهم می‌سازد.

مسئله اصلی در این تحقیق، تعیین زمان بهینه برای اتمام پروژه پیش از شروع آن و در مرحله تنظیم قرارداد است. این زمان که به‌عنوان موعد مقرر تحویل پروژه در نظر گرفته می‌شود، در صورت عدم تحقق می‌تواند منجر به تحمیل هزینه‌های تأخیر و در صورت تحقق زودتر از موعد، موجب دریافت پاداش تعجیل شود.

از این‌رو، هدف اصلی ارائه یک چارچوب تصمیم‌گیری جامع برای انتخاب بازه زمانی مناسب اتمام پروژه است، به‌گونه‌ای که مجموع هزینه‌های ناشی از تأخیر و پاداش‌های تعجیل در آن بهینه گردد. برای دستیابی به این هدف، یک تابع هزینه-پاداش تعریف می‌شود که به‌صورت همزمان تأثیر دو بخش عمده یعنی احتمال تعجیل و احتمال تأخیر را در نظر می‌گیرد. این تابع بر پایه توزیع احتمالی زمان اتمام پروژه، که از تحلیل زنجیره مارکوفی استخراج می‌شود، طراحی شده و به تصمیم‌گیرندگان این امکان را می‌دهد تا با ارزیابی هزینه‌های مرتبط، بازه زمانی بهینه برای تحویل پروژه را تعیین کنند. این رویکرد علاوه بر افزایش دقت در پیش‌بینی زمان اتمام، به کاهش هزینه‌های کل پروژه و ارتقای بهره‌وری در مدیریت پروژه منجر می‌شود.

ساختار مقاله حاضر شامل پنج بخش اصلی است. در بخش دوم، به بررسی پیشینه پژوهش پرداخته می‌شود؛ در این بخش، مطالعات مرتبط با زنجیره تأمین پروژه، زمان‌بندی تحت شرایط عدم قطعیت، و محاسبه قابلیت اطمینان مرور شده و جایگاه پژوهش حاضر در میان تحقیقات پیشین تبیین می‌گردد. بخش سوم به روش‌شناسی تحقیق اختصاص دارد و شامل چند زیربخش است. در آغاز، چالش‌های اساسی مرتبط با زمان‌بندی پروژه‌ها در حضور منابع تجدیدپذیر و تجدیدنپذیر در محیط‌های نامطمئن تشریح می‌شود. سپس در بخش بررسی حالات پروژه، وضعیت‌های مختلفی که پروژه ممکن است در طول اجرا به آن‌ها وارد شود، تحلیل می‌گردد. در بخش بعدی به توسعه الگوریتمی مبتنی بر زنجیره مارکوف می‌پردازد که برای ارزیابی قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه طراحی شده است. در نهایت، در بخش تابع بهینه‌سازی هزینه-پاداش، یک مدل ریاضی ارائه می‌شود که هدف آن بهینه‌سازی هزینه‌های ناشی از تأخیر و پاداش‌های مربوط به اتمام زود هنگام پروژه است. در بخش چهارم نیز، نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل‌ها ارائه شده و تأثیر تغییر در پارامترهای کلیدی بر قابلیت اطمینان و تابع هزینه-پاداش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام، در بخش پنجم نتایج کلی تحقیق جمع‌بندی شده و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی ارائه می‌گردد.

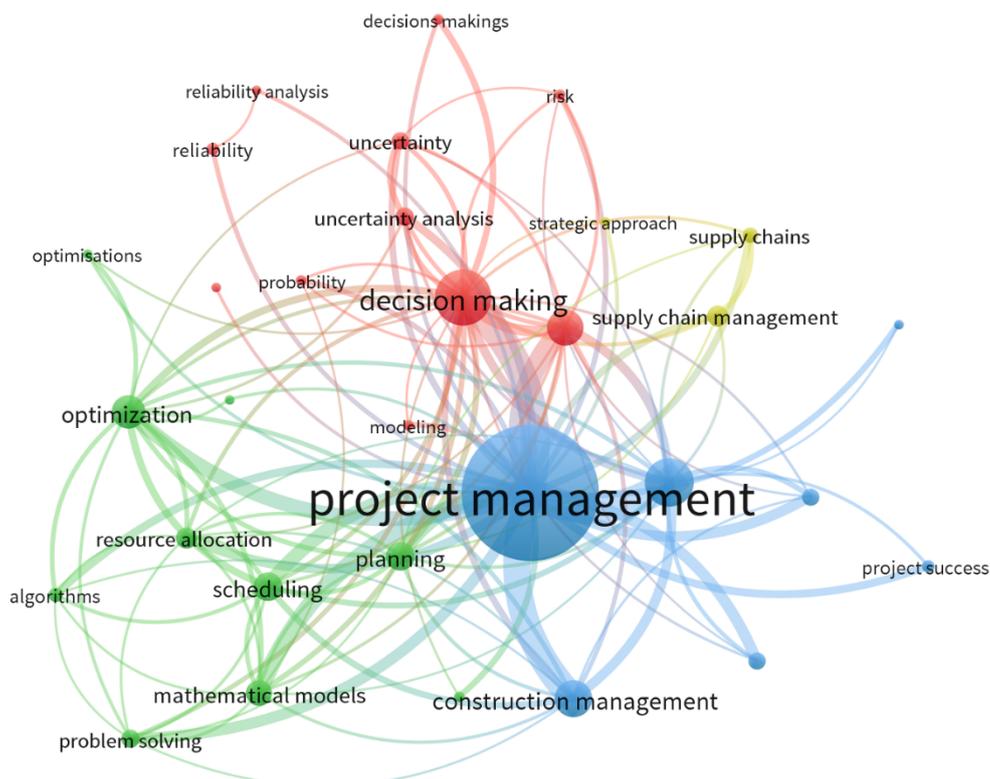
نوآوری اصلی این پژوهش در ارائه یک چارچوب تحلیلی جامع برای تعیین زمان بهینه اتمام پروژه‌ها تحت شرایط عدم قطعیت منابع و مدت زمان فعالیت‌ها نهفته است. این مطالعه با ادغام مدل‌سازی شبکه‌ای مبتنی بر تکنیک مسیر بحرانی توسعه یافته و فرایندهای مارکوف، توانایی تحلیل تمامی سناریوهای ممکن پیشرفت پروژه و محاسبه دقیق احتمال اتمام پروژه در زمان مقرر را فراهم می‌کند. علاوه بر این، با در نظر گرفتن منابع تجدیدپذیر و تجدیدنپذیر و سیاستهای سفارش‌دهی موجودی، این مدل امکان بهینه‌سازی همزمان هزینه‌های تأخیر و پاداش‌های تحویل زود هنگام را ارائه می‌دهد. ترکیب تحلیل قابلیت اطمینان و تابع هزینه-پاداش، رویکردی عملی و واقع‌گرایانه برای تصمیم‌گیری مدیریتی فراهم می‌آورد که می‌تواند مدیران پروژه را در برنامه‌ریزی دقیق، کاهش ریسک تأخیر و افزایش بهره‌وری مالی پروژه‌ها یاری دهد. به عبارت دیگر، این تحقیق یک چارچوب منسجم و نوآورانه ارائه می‌دهد که قابلیت استفاده در پروژه‌های واقعی و با پیچیدگی بالا را داراست و مزیت قابل توجهی نسبت به روش‌های موجود ارائه می‌کند.

۲. مرور ادبیات و مبانی نظری

پیشینه تحقیق

مرور ادبیات نشان می‌دهد که مطالعات پیشین عمدتاً بر دو حوزه مجزا تمرکز داشته‌اند: برخی تحقیقات به مدیریت زنجیره تأمین پروژه‌ها پرداخته‌اند و برخی دیگر مدل‌های بهینه‌سازی و زمان‌بندی پروژه‌ها را تحت شرایط قطعی بررسی کرده‌اند (شکل ۲). با این حال، تحقیقات کمی وجود دارند که مدیریت زنجیره تأمین پروژه و زمان‌بندی پروژه‌ها را در محیط‌های دارای عدم قطعیت با یکدیگر تلفیق کنند. مدیریت پروژه ذاتاً با حوزه‌های بهینه‌سازی، تصمیم‌گیری و مدیریت زنجیره تأمین در ارتباط است. به عنوان مثال، بهینه‌سازی منابع و برنامه‌ریزی پروژه، نقش کلیدی در تخصیص مؤثر منابع دارد و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت مستلزم ارزیابی احتمالات و محاسبه معیارهای قابلیت اطمینان است. از سوی دیگر، زمان‌بندی پروژه به شدت به تخصیص منابع وابسته است و با استراتژی‌های بهینه‌سازی ارتباط نزدیکی دارد.

شکاف اصلی پژوهش در این است که مطالعات موجود، یکپارچگی بین مدیریت زنجیره تأمین پروژه و زمان‌بندی پروژه در شرایط عدم قطعیت را به طور محدود مورد بررسی قرار داده‌اند. بنابراین، تحقیق حاضر با ترکیب این دو حوزه، ضمن بهینه‌سازی تخصیص منابع، قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه را محاسبه می‌کند. این رویکرد نه تنها شکاف موجود در ادبیات را پر می‌کند، بلکه به درک بهتر مدیریت پروژه در محیط‌های عدم قطعیت و اتخاذ تصمیم‌های عملیاتی و اقتصادی دقیق کمک می‌نماید.



شکل ۲. شبکه واژگان کلیدی پژوهش

مبانی و چارچوب نظری تحقیق

با وجود آن که پژوهش‌های محدودی به‌طور مستقیم به زمان اتمام پروژه در شبکه‌های پرت پرداخته‌اند. مطالعات گسترده‌تری بر روی تحلیل مسیر بحرانی و زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های احتمالی صورت گرفته است. بخشی از این مطالعات به تحلیل‌های نظری اختصاص دارد؛ برای نمونه، [۲۰] یک طبقه‌بندی جامع از شبکه‌های احتمالی ارائه کرده‌اند. در پژوهشی دیگر، با فرض توزیع نمایی زمان فعالیت‌ها، شبکه پرت را به یک زنجیره مارکوفی با تعداد حالت‌های محدود و زمان پیوسته تبدیل کرده و از آن برای محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل پروژه بهره گرفته‌اند [۲۱]. از آنجا که محاسبه دقیق توزیع زمان اتمام پروژه اغلب با پیچیدگی‌های محاسباتی همراه است، برخی پژوهش‌ها استفاده از تکنیک‌های تقریبی یا ارائه حدود پایین برای زمان تکمیل پروژه را پیشنهاد کرده‌اند. در سال‌های اخیر، رویکرد پروژه‌محور در بسیاری از سازمان‌ها به‌عنوان پارادایمی غالب شناخته شده است، به‌طوری‌که فعالیت‌های سازمانی عمدتاً در قالب پروژه‌ها تعریف و اجرا می‌شوند. در چنین ساختاری، سازمان‌ها معمولاً با سیستم‌های چندپروژه‌ای مواجه هستند که در آن منابع محدود میان پروژه‌های مختلف به‌صورت اشتراکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این موضوع از طریق افزودن فعالیت‌های مجازی ابتدایی و انتهایی و تلقی هر پروژه به‌عنوان زیرپروژه‌ای از یک پروژه کلان، یا در نظر گرفتن پروژه‌ها به‌صورت مستقل و تعریف یک یا چند تابع هدف مشترک، مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۳، ۲۴].

از سوی دیگر، عدم قطعیت در زمان انجام فعالیت‌ها، چالشی مهم در برنامه‌ریزی پروژه‌ها محسوب می‌شود؛ به‌گونه‌ای که وقوع آن می‌تواند منجر به انحرافات قابل توجه از برنامه زمان‌بندی گردد [۲۵]. در همین راستا، چارنس و همکاران، با فرض توزیع نمایی زمان فعالیت‌ها، مدلی برای برنامه‌ریزی تصادفی در شبکه‌های احتمالی ارائه کرده‌اند [۲۶].

در برخی از پژوهش‌ها، روش‌های سیستماتیک برای محاسبه طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های احتمالی پیشنهاد شده‌اند. برای نمونه، مارتین [۲۷] با استفاده از کاهش شبکه به فعالیت‌های سری-موازی، الگوریتمی برای محاسبه طولانی‌ترین مسیر ارائه کرده و از برنامه‌ریزی پویا برای

حل این مسئله بهره گرفته است. در مطالعه‌ای دیگر، آذرون و همکاران [۲۸] تابع توزیع طولانی‌ترین مسیر را در شبکه‌های صف بررسی کرده‌اند؛ نتایج این مطالعه قابلیت تعمیم به شبکه‌های پرت پویا را نیز دارد. همچنین حد پایین میانگین زمان تکمیل پروژه در این شبکه‌ها توسط آذرون و فاطمی‌قمی [۲۹] ارائه شده است.

در ادامه‌ی این خط پژوهش، الگوریتمی برای انتخاب کوتاه‌ترین مسیر از گره ابتدایی تا گره انتهایی در شبکه‌های صف در حالت پایدار پیشنهاد شده که کاربرد آن در شبکه‌هایی با ایستگاه‌های خدمت‌دهی با تعداد محدود یا نامحدود خدمت‌دهنده مطرح شده است [۳۰]. افزون بر این، مدل برنامه‌ریزی احتمالی مبتنی بر زنجیره مارکوف برای مسئله تخصیص منابع در شبکه‌های پرت پویا توسعه یافته است [۲۸]. همچنین الگوریتمی جهت تعیین موعد مقرر تحویل پروژه‌ها در شبکه‌های پرت پویا پیشنهاد شده است [۳۱].

کاربرد زنجیره مارکوف فراتر از برنامه‌ریزی پروژه نیز مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه، [۳۲] مدلی مبتنی بر زنجیره مارکوف برای بهینه‌سازی قابلیت اطمینان در مدیریت مالی شرکت‌ها ارائه کرده است که با تحلیل داده‌های اخیر، موجب بهبود تخصیص منابع و افزایش کارایی سیستم مالی می‌شود. در حوزه انرژی، راجیوان و همکاران [۳۳] مدلی برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم انرژی با در نظر گرفتن پایش وضعیت اجزا توسعه داده‌اند و تأثیر نرخ خرابی و زمان تعمیر بر قابلیت اطمینان سیستم را مورد تحلیل قرار داده‌اند. پیروی و همکاران [۳۴] نیز روشی مبتنی بر زنجیره مارکوف برای حل مسئله تخصیص افزونگی در استراتژی افزونگی ترکیبی ارائه داده‌اند که جایگزین فرمول‌بندی پیچیده و زمان‌بر کران پایین شده و راه‌حلی با قابلیت اطمینان بالا و زمان محاسبات کمتر عرضه می‌کند.

همچنین روش‌های ترکیبی نیز در برخی مطالعات مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به‌طور خاص، در پژوهش [۳۶] با ترکیب درخت خطا، منطق فازی و زنجیره مارکوف، مدلی برای تحلیل هم‌زمان ریسک، قابلیت اطمینان، دسترس‌پذیری و عدم قطعیت ارائه کرده‌اند. در زمینه نگهداری و بهینه‌سازی نیز زنجیره مارکوف به‌کار گرفته شده است؛ به و همکاران [۳۹] مدلی از نوع MINLP برای بهینه‌سازی هم‌زمان افزونگی، بازرسی و نگهداری توسعه داده‌اند. همچنین [۳۷] مدلی نیمه‌مارکوفی برای تعیین بازه بهینه نگهداری پیشگیرانه ارائه کرده‌اند که با در نظر گرفتن هزینه‌های نگهداری و درآمد بهره‌برداری، نشان می‌دهد افزایش درآمد منجر به افزایش فاصله بین تعمیرات و کاهش آن موجب فشرده‌تر شدن دوره‌های نگهداری می‌شود. در نهایت، در یکی از مدل‌های نوین، شبکه‌های پرت پویا با چند خدمت‌دهنده به‌صورت یک شبکه صف مدل‌سازی شده‌اند که در آن پروژه‌های ورودی مشابه، طبق فرآیند پواسون وارد سیستم می‌شوند و فعالیت‌ها به‌صورت مستقل و با توزیع نمایی در ایستگاه‌های کاری مربوطه انجام می‌گیرند. در برخی از پژوهش‌ها، فعالیت‌ها در شبکه‌های پرت پویا توسط تنها یک خدمت‌دهنده از میان چندین خدمت‌دهنده موجود و بر اساس اولویت "اولین ورودی، اولین سرویس" پردازش می‌شوند [۳۸]. در پژوهشی دیگر، شبکه‌های پرت پویا با ظرفیت محدود برای اجرای هم‌زمان پروژه‌ها به‌صورت شبکه صف مدل‌سازی شده‌اند.

در این مدل، فرض بر این است که ظرفیت سیستم برای اجرای هم‌زمان پروژه‌ها محدود است و پروژه‌ها طبق فرآیند پواسون وارد سازمان می‌شوند. در هر ایستگاه کاری تنها یک خدمت‌دهنده وجود دارد و ترتیب صف‌ها به‌صورت "اولین ورودی، اولین خروجی" است [۴۰]. برای محاسبه میانگین زمان تکمیل پروژه در این نوع شبکه‌ها، ابتدا شبکه صف به شبکه احتمالی تبدیل می‌شود و سپس معادله دیفرانسیل سیستم با استفاده از مدل مارکوفی با حالات محدود و زمان پیوسته حل می‌شود.

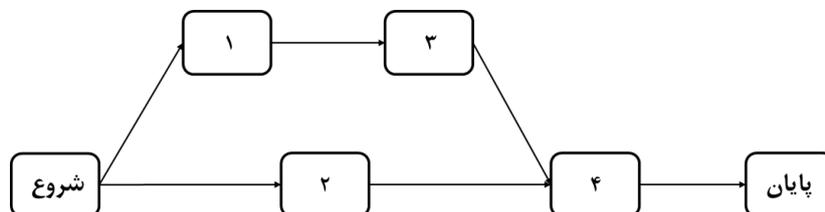
همچنین، در این مطالعات دو دیدگاه برای تخصیص منابع در شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده در هر ایستگاه کاری بررسی شده است: یکی به‌عنوان خدمت‌دهنده‌ها و دیگری به‌عنوان منابع مؤثر بر خدمت‌دهنده‌ها [۳۸].

۳. روش‌شناسی پژوهش

بخش روش‌شناسی پژوهش به تشریح فرآیند کار و جزئیات مسئله می‌پردازد. هدف اصلی آن تعیین قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه و محاسبه احتمال اتمام پروژه در زمان مقرر است. در ادامه، جزئیات بیشتری از مدل‌سازی و روش‌های به‌کارگرفته شده ارائه خواهد شد.

تعریف مسأله. در این بخش، ابتدا فرآیند کار توضیح داده می‌شود و سپس جزئیات مسئله به‌طور دقیق بیان می‌گردد. هدف اصلی این مقاله، تعیین قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه و محاسبه احتمال اتمام آن در زمان مقرر است. برای این منظور، شبکه پروژه به صورت یک شبکه پرت مدل‌سازی شده است که مدت زمان اجرای فعالیت‌ها از توزیع نمایی پیروی می‌کند. همچنین، علاوه بر تخصیص منابع تجدیدپذیر که در مطالعات پیشین بیشتر مورد توجه قرار گرفته است، تخصیص منابع تجدیدناپذیر نیز مد نظر قرار گرفته شده و تأثیر آن بر زمانبندی پروژه بررسی می‌شود. با توجه به محدودیت منابع و احتمال تأخیر در تأمین آن‌ها، برخی از فعالیت‌ها ممکن است به دلیل کمبود منابع در صف قرار گیرند که این تأخیرها می‌توانند بر تکمیل پروژه تأثیرگذار باشند. به همین منظور، در تحلیل شبکه پروژه، از فرآیند مارکوف استفاده شده است. این روش به دلیل وابستگی هر حالت تنها به حالت قبلی، ابزار مناسبی برای مدل‌سازی زمانبندی پروژه در شرایط عدم قطعیت است. علاوه بر این، در پروژه‌های ساخت و ساز معمولاً از روش اندازه‌دسته‌ای برای سفارش منابع استفاده می‌شود که منابع در مقادیر معین و در زمان‌های مشخص بر اساس قرارداد تحویل داده می‌شوند. این تحقیق نیز فرضیات مشابهی را در نظر گرفته است. در نهایت، این مقاله الگوریتمی برای محاسبه تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه ارائه می‌دهد که با تحلیل تمام حالت‌های ممکن پروژه و احتمال انتقال بین آن‌ها، قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه را محاسبه می‌کند. همچنین، یک مثال کاربردی برای تشریح روند محاسبات و اجرای الگوریتم پیشنهادی آورده شده است. در ادامه با بررسی شبکه پروژه‌ای، هر یک از موارد مطرح شده بررسی می‌شود.

در شکل ۳، شبکه فعالیت‌ها به صورت فعالیت در گره برای یک پروژه با چهار فعالیت نشان داده شده است. هر کدام از این فعالیت‌ها به عنوان یک ایستگاه کاری در نظر گرفته می‌شوند و فرض بر این است که هر فعالیت برای اجرا نیازمند منابع تجدیدپذیر و تجدیدناپذیر است. با افزایش منابع تجدیدپذیر، سرعت اجرای فعالیت‌ها افزایش می‌یابد. همچنین، اگر منابع تجدیدناپذیر در بازه‌های زمانی کوتاه‌تری به پروژه تزریق شوند، زمان اتمام پروژه کاهش پیدا خواهد کرد. بنابراین حتی اگر منابع تجدیدپذیر کافی باشند، کمبود منابع تجدیدناپذیر می‌تواند باعث شود فعالیت‌ها با تأخیر مواجه شوند. برای تحلیل این پدیده، از مدل‌های مارکوفی استفاده خواهیم کرد. مدل‌های مارکوف به ما این امکان را می‌دهند که وضعیت پروژه را به‌طور پیوسته در طول زمان تحلیل کنیم و پیش‌بینی کنیم که پروژه در هر لحظه در کدام وضعیت قرار خواهد گرفت. در این مدل، فرض بر این است که وضعیت‌های پروژه تنها به وضعیت قبلی وابسته‌اند و نه به تاریخچه طولانی‌تر و فعالیت‌های گذشته پروژه. به عبارت دیگر، هر فعالیت به صورت یک فرآیند مارکوفی در نظر گرفته می‌شود که وضعیت آن تنها به وضعیت فعالیت‌های قبلی و منابع موجود در آن زمان بستگی دارد. برای تحلیل این سیستم، از مدل‌سازی مارکوفی استفاده شده است که در آن، وضعیت پروژه در هر زمان تنها به وضعیت پیشین آن وابسته است. در این چارچوب، نرخ ورود فعالیت‌ها به فاز اجرایی پروژه با پارامتر λ مشخص می‌شود؛ این نرخ نشان‌دهنده متوسط تعداد فعالیت‌هایی است که در واحد زمان برای اجرا آماده می‌شوند. همچنین نرخ اجرای فعالیت‌ها، که به توان سرویس‌دهی منابع تجدیدپذیر وابسته است، با پارامتر μ نمایش داده می‌شود و بیانگر میانگین تعداد فعالیت‌هایی است که در واحد زمان تکمیل می‌شوند. این دو نرخ، نقش تعیین‌کننده‌ای در گذار بین حالات مختلف پروژه ایفا می‌کنند و اساس تحلیل مارکوفی پروژه را شکل می‌دهند.



شکل ۳. نمودار شبکه AON یک پروژه.

در این مدل، زمان انجام هر فعالیت و تخصیص منابع تجدیدپذیر و تجدیدناپذیر به فعالیت‌ها، به‌طور تصادفی و بر اساس توزیع‌های احتمالاتی مدل‌سازی می‌شود. به این ترتیب، تغییرات در منابع تجدیدپذیر و تجدیدناپذیر می‌تواند منجر به انتقال بین وضعیت‌های مختلف پروژه شود. این

انتقال‌ها به طور دقیق و با استفاده از ماتریس‌های انتقال مارکوف مدل‌سازی می‌شود، که در آن هر وضعیت پروژه به یک وضعیت بعدی منتقل می‌شود با توجه به نرخ‌های ورود منابع تجدیدپذیر و تجدیدناپذیر و زمان تخصیص آن‌ها.

در بخش بعد، شبکه پروژه را با استفاده از مدل‌های مارکوف تحلیل خواهیم کرد و آن را با شبکه‌های پرت مارکوفی توسعه خواهیم داد. علاوه بر این، با ارائه یک الگوریتم، حالات مختلف سیستم را شناسایی کرده و تابع توزیع زمان اتمام پروژه را محاسبه خواهیم کرد که تابع محاسبه شده به عنوان تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه معرفی خواهد شد.

بررسی حالات پروژه. در این بخش، یک روش تحلیلی برای محاسبه تابع توزیع زمان اتمام پروژه در شبکه‌های پرت مارکوفی ارائه می‌دهیم. این روش با در نظر گرفتن منابع تجدیدناپذیر و تخصیص آن‌ها به فعالیت‌های پروژه، تابع توزیع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه را از نقطه شروع تا پایان یک شبکه تصادفی غیرچرخه‌ای جهت‌دار که طول کمان‌ها در آن نقش دارد، توسعه می‌دهد. برای مدل‌سازی این مسئله، ابتدا شبکه پرت که به صورت A_0N نمایش داده می‌شود، به یک شبکه A_0A تبدیل می‌شود. فرض کنید گره a در شبکه پرت دارای کمان‌های ورودی $b_1 b_2 \dots b_n$ و کمان‌های خروجی $d_1 d_2 \dots d_m$ باشد. در این صورت، در شبکه پرت کلاسیک، گره a با کمان $(k k')$ جایگزین خواهد شد، به طوری که n کمان به گره k وارد می‌شود و m کمان از گره k' خارج می‌شود. در شبکه پرت کلاسیک (A_0A) که به صورت $G = (V, A)$ مدل می‌شود، مجموعه V نمایانگر گره‌ها و مجموعه A نمایانگر فعالیت‌ها است. در طول مقاله، واژه‌های "فعالیت" و "کمان" به طور متناوب استفاده می‌شوند و به یکدیگر ارجاع داده می‌شوند. در این ساختار، گره s به عنوان گره ابتدایی و گره t به عنوان گره انتهایی شناخته می‌شود. همچنین، طول کمان $a \in A$ به عنوان یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر μ_a تعریف می‌شود. برای هر کمان $a \in A$ ، $\alpha(a)$ به عنوان گره شروع فعالیت a و $\beta(a)$ به عنوان گره پایانی فعالیت a در نظر گرفته می‌شود. تعاریف زیر برای مسأله مورد بررسی در این تحقیق به کار گرفته می‌شود:

تعریف ۱. $I(v)$ به عنوان مجموعه فعالیت‌هایی که به گره v در شبکه‌های پرت کلاسیک خاتمه می‌یابند و $O(v)$ مجموعه فعالیت‌هایی که از گره v در شبکه پرت کلاسیک شروع می‌شوند، تعریف می‌شوند. یعنی داریم:

$$I(v) = \{a \in A : \beta(a) = v\} \quad (v \in V) \quad \text{رابطه (۳)}$$

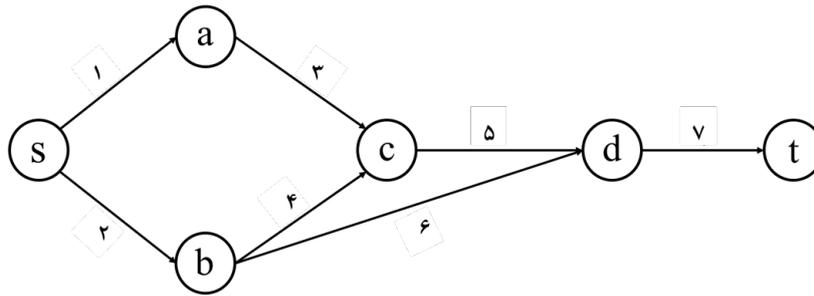
$$O(v) = \{a \in A : \alpha(a) = v\} \quad (v \in V) \quad \text{رابطه (۴)}$$

تعریف ۲. اگر $X \subset V$ چنانچه $s \in X$ و $\bar{X} = V - X$ ، در این صورت (X, \bar{X}) ، مجموعه فعالیت‌هایی که شروع در X و پایان در \bar{X} باشد را نمایش خواهد داد. یعنی برای برش (s, t) داریم:

$$(X, \bar{X}) = \{a \in A : \alpha(a) \in X, \beta(a) \in \bar{X}\} \quad \text{رابطه (۵)}$$

حال اگر $(X, \bar{X}) = \phi$ باشد، به آن برش، برش جهت‌دار یکنواخت گفته می‌شود یعنی اینکه در برش انجام شده، دو فعالیت در یک مسیر وجود نخواهند داشت.

شکل ۴، شبکه پرتی را نمایش می‌دهد که طبق تعریف، برش‌های جهت‌دار یکنواخت آن عبارتند از: $(۱, ۲)$ ، $(۲, ۳)$ ، $(۱, ۴, ۶)$ ، $(۳, ۴, ۶)$ ، $(۵, ۶)$ و (۷).



شکل ۴. شبکه AoA پروژه.

تعریف ۳. اگر فرض کنیم چهارتایی مرتب $(E F Q W)$ ، زیرمجموعه‌هایی از برش جهتدار یکنواخت D در شبکه باشد. در این صورت این چهارتایی مرتب، چهار افزایی قابل قبول نامیده می‌شود به طوریکه:
 $D = E \cup F \cup Q$ ، $E \cap F = E \cap Q = F \cap Q = \emptyset$ و نیز برای $a \in F$ داشته باشیم: $I(\beta(a)) \not\subset F$. همچنین W نشان دهنده میزان منابع تجدیدناپذیر در دسترس است که به صورت اندازه دسته‌ای می‌باشد.

برای روشن‌تر شدن نحوه عملکرد مدل مارکوفی، لازم است به تشریح دقیق‌تر فرآیند انتقال حالت پردازیم. «خاصیت مارکوفی» در این پژوهش به این معناست که وضعیت پروژه در زمان t_i (لحظه ورود دسته جدید منابع) تنها به وضعیت پروژه در زمان t_{i-1} و فعالیت‌هایی که در این بازه زمانی به اتمام رسیده‌اند، بستگی دارد.

هر «حالت» در زنجیره مارکوف، یک برش چهار قسمتی $[E, F, Q, W]$ است که وضعیت کل پروژه را در آن لحظه توصیف می‌کند. فرآیند «انتقال» از یک حالت به حالت دیگر در دو مرحله اصلی رخ می‌دهد:

۱. اتمام فعالیت‌ها (فرآیند احتمالی): در بازه زمانی بین t_{i-1} و t_i ، هر فعالیت «فعال» (عضو E با احتمالی مشخص بر اساس توزیع نمایی خود، که در ادامه در رابطه ۸ توضیح داده می‌شود) ممکن است به اتمام برسد. اگر فعالیتی تمام شود، به مجموعه «غیرفعال» F منتقل می‌شود. این اتمام، ممکن است فعالیت‌های پس‌نیاز خود را «آماده شروع» کند.
۲. تزریق منابع و تخصیص (فرآیند قطعی در t_i): در لحظه دقیق t_i ، دسته جدید منابع به پروژه تزریق می‌شود و مقدار W افزایش می‌یابد. سپس، سیستم تمام فعالیت‌های «آماده شروع» و همچنین فعالیت‌های «در صف» (عضو Q را بر اساس سیاست اولویت‌بندی بررسی می‌کند. هر فعالیتی که اکنون منابع کافی W برایش موجود است، از Q به E فعال منتقل می‌شود و منابع مورد نیازش از W کسر می‌گردد.

بنابراین، زنجیره مارکوفی، توالی این حالات را در زمان‌های گسسته t_1, t_2, \dots مدل‌سازی می‌کند. مثال ارائه شده در ادامه (شکل ۴ و ۵)، این فرآیند گام به گام را نشان می‌دهد. برای روشن‌تر شدن مطلب، شکل ۲ را مجدداً در نظر بگیرید که در آن $(3^q 4^* 6^a 0^t)$ یک UDC است. برای مثال فرض کنید این برش به $E = \{6\}$ ، $F = \{4\}$ و $Q = \{3\}$ افزایش می‌شود. در این مورد این چهارتایی مرتب یک برش چهارافزایی قابل قبولی را تشکیل می‌دهند، چون داریم: $I(\beta(3)) = \{34\} \not\subset F$ اما اگر $Q = \{6\}$ ، $F = \{34\}$ و $E = \emptyset$ ، در این صورت این چهارتایی مرتب یک برش چهارافزایی قابل قبول نخواهد بود، زیرا؛ $I(\beta(3)) = \{34\} \subset F = \{34\}$. همچنین در این حالت منبعی جهت تخصیص به فعالیت‌ها موجود نمی‌باشد و مقدار آن صفر است.

تعریف ۴. در طول اجرای پروژه، هر فعالیت در زمان t می‌تواند در یکی از سه حالت فعال، غیرفعال، یا در صف قرار گیرد که به شرح زیر تعریف می‌شوند:

فعال: فعالیتی که در زمان t در حال اجرا است، به عنوان فعالیت فعال شناخته می‌شود.

غیرفعال: فعالیتی که در زمان t به اتمام رسیده، اما حداقل یکی از فعالیت‌های مجموعه $I(\beta(a))$ هنوز به پایان نرسیده است. به عبارت دیگر، در این وضعیت هیچ فعالیتی از مجموعه $O(\beta(a))$ اجازه شروع ندارد.

در صف: فعالیتی که در زمان t تمامی پیش‌نیازهای آن انجام شده اما منتظر دریافت منابع تجدیدناپذیر برای آغاز است.

تعریف ۵. حالت پروژه در زمان t برابر است با $X(t)$ که تابعی است متشکل از:

$Y(t)$: مجموعه فعالیت‌های فعال پروژه در زمان t می‌باشد.

$Z(t)$: مجموعه فعالیت‌های غیرفعال پروژه در زمان t می‌باشد.

$Q(t)$: مجموعه فعالیت‌های در صف پروژه در زمان t می‌باشد.

$W(t)$: برابر با میزان منابع تجدیدناپذیر موجود در زمان t می‌باشد.

$$\begin{aligned} X(t) &= (Y(t_1) Z(t_1) Q(t_1) W(t_1)) (Y(t_2) Z(t_2) Q(t_2) W(t_2)) \dots \\ &= (Y(t_n) Z(t_n) Q(t_n) W(t_n)) \end{aligned} \quad \text{رابطه (۶)}$$

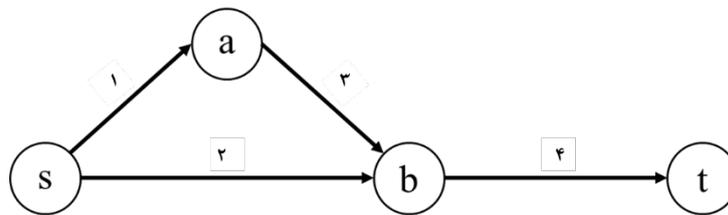
برای روشن‌تر شدن موضوع، ابتدا به اهمیت منابع تجدیدناپذیر در سیستم پرداخته می‌شود. در دنیای واقعی، هر فعالیت پروژه به مقدار مشخصی از این منابع نیاز دارد که به‌عنوان یکی از اجزای کلیدی برای تأمین نیازهای مختلف پروژه به کار می‌روند. این منابع در پیشبرد فعالیت‌ها و کل پروژه نقشی اساسی دارند. اهمیت این موضوع زمانی بیشتر نمایان می‌شود که در هر مرحله از پروژه به تأثیر مستقیم این منابع بر زمان شروع فعالیت‌ها توجه کنیم. همچنین یکی از نکات مهم، روش‌های مختلف برای انتقال این منابع به پروژه است. یکی از روش‌های معمول، سفارش منابع به‌صورت اندازه دسته‌ای است؛ به این معنا که منابع در فواصل زمانی مشخص از تأمین‌کننده دریافت شده و به محل پروژه منتقل می‌شوند.

در این روش، مقادیر ثابتی از منابع در زمان‌های معینی به پروژه وارد شده و این موضوع منجر به شکل‌گیری شبکه‌ای از فعالیت‌ها می‌شود. در این شبکه، زمانی که منابع به پروژه می‌رسند، امکان شروع فعالیت‌های جدید فراهم می‌شود. این رویکرد باعث می‌شود تغییر حالات سیستم تنها در لحظاتی رخ دهد که منابع به پروژه وارد می‌شوند. هنگامی که منابع کافی برای اجرای فعالیتی در دسترس قرار می‌گیرد، اگر آن فعالیت در حالت انتظار باشد، از صف خارج شده و به فعالیت‌های در حال اجرا اضافه می‌شود. همان‌طور که اشاره شد، منابع به‌صورت دسته‌ای و در مقادیر معین به پروژه وارد می‌شوند. همچنین ممکن است در هر لحظه بیش از یک فعالیت در صف انتظار قرار داشته باشد. در چنین شرایطی، این پرسش مطرح می‌شود که اولویت تخصیص منابع به کدام فعالیت داده شود. با توجه به این موضوع، می‌توان سیاست‌های مختلفی برای تخصیص منابع به فعالیت‌ها تدوین کرده و این سیاست‌ها را اولویت‌بندی نمود.

بنابراین در این سیستم، زمان به‌صورت گسسته در نظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال، فرض کنید در پروژه‌ای زمان‌های t_1 و t_2 لحظات ورود منابع به محل پروژه هستند. در این مثال، تغییر وضعیت سیستم فقط در این دو زمان اتفاق می‌افتد و در فاصله بین آن‌ها هیچ تغییری در حالت سیستم رخ نخواهد داد. حتی اگر یک فعالیت فعال در این بازه زمانی به پایان برسد، به دلیل کمبود منابع برای شروع فعالیت بعدی، حالت سیستم تا زمان t_1 ثابت باقی می‌ماند. بنابراین، با توجه به اینکه تغییر حالات سیستم تنها در زمان‌های ورود منابع رخ می‌دهد، کافی است وضعیت سیستم را فقط در این لحظات بدانیم. بر اساس این موضوع، می‌توان این شبکه را با استفاده از زنجیره مارکوف تحلیل کرد. حالت سیستم با توجه به میزان منابع وارد شده و منابع باقی‌مانده برای انجام فعالیت‌ها به حالت‌های مختلف تغییر می‌کند. در نتیجه، علاوه بر روابط تقدم بین فعالیت‌های پروژه، میزان منابع موجود نیز نقش مهمی در تعیین وضعیت‌های مختلف سیستم ایفا می‌کند. این حالت‌های سیستم به‌صورت چهارقسمتی نمایش داده می‌شوند و بر اساس نوع هر فعالیت (فعال، غیرفعال و یا در صف) و میزان منابع موجود، برش چهارقسمتی قابل قبول برای کل سیستم طبق رابطه ۷ تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} [E F Q W] & \text{رابطه (۷)} \\ \stackrel{\text{def}}{=} [(E F Q W)_{t_1} \dots (E F Q W)_{t_n}]; n \in \{12 \dots N\} \end{aligned}$$

در این برش چهار قسمتی، E نشان‌دهنده فعالیت فعال، F بیانگر فعالیت غیرفعال، Q نمایانگر فعالیت در صف و W میزان منابع موجود در آن حالت سیستم است. همچنین t نشان‌دهنده زمانی است که منابع در آن لحظه به محل پروژه می‌رسند. آخرین منبع نیز در زمان t_n به پروژه خواهد رسید. E ، F و Q به ترتیب شامل فعالیت‌های فعال، غیرفعال و در صف در یک برش جهت‌دار یکنواخت می‌باشند. به این ترتیب در صورتیکه فعالیت a پایان یابد (با نرخ انجام μ_a) و حداقل یک فعالیت ناتمام در $I(\beta(a))$ وجود داشته باشد، فعالیت a از مجموعه E به یک مجموعه جدید از فعالیت‌های غیرفعال یعنی \bar{F} منتقل می‌شود. همچنین در صورتی که منبع کافی جهت انجام فعالیت‌هایی از مجموعه Q موجود باشد، با توجه به سیاست مورد اتخاذ جهت تخصیص منابع به آن فعالیت‌ها، مجموعه جدیدی از فعالیت‌های فعال تحت عنوان \bar{E} تشکیل خواهد شد. علاوه بر این، با پایان دادن به فعالیت a ، اگر فعالیت‌های پس از آن یعنی $O(\beta(a))$ که مجموعه‌ای n عضوی می‌باشد فعال شوند، در این صورت با توجه به در دست بودن منابع جهت انجام فعالیت‌های بعدی و البته سیاست تخصیص منابع به این فعالیت‌ها، مجموعه جدیدی از فعالیت‌های فعال به عنوان \bar{E} تشکیل خواهد شد که این مجموعه فعال دارای m عضو می‌باشد. همچنین اگر منابع کافی جهت انجام برخی از فعالیت‌ها در پروژه وجود نداشته باشد، مجموعه جدیدی از فعالیت‌های غیرفعال به عنوان \bar{Q} تشکیل خواهد شد که این مجموعه از فعالیت‌های در صف نیز دارای $n - m$ عضو خواهد بود.

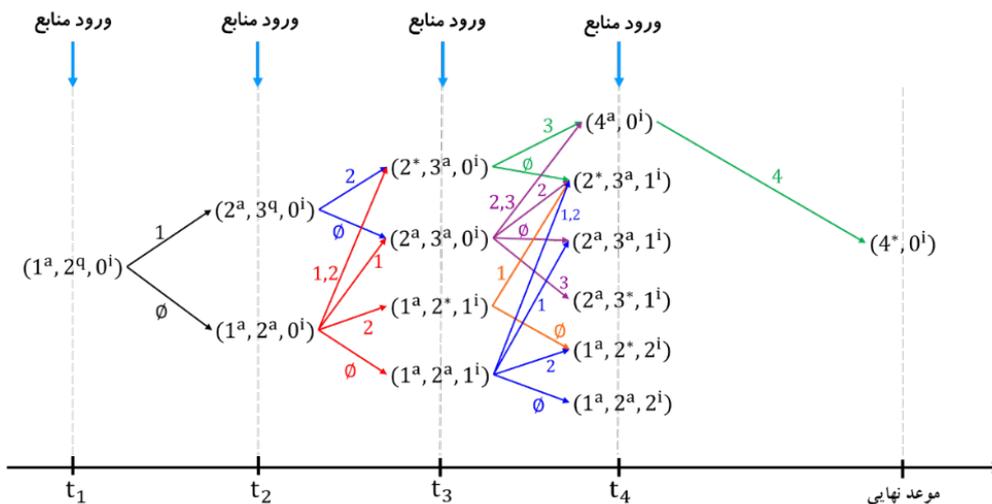


شکل ۵. شبکه AOA مربوط به شکل ۲.

شکل ۵ شبکه AOA مربوط به شکل ۲ می‌باشد که فرض بر آن است جهت انجام هر فعالیت مقدار یک اندازه دسته‌ای از یک نوع منبع مشخص مورد نیاز است. همچنین می‌دانیم ورود منابع به محل پروژه در چهار مقطع زمانی t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 می‌باشد. فرض بر آن است جهت انجام هر فعالیت مقدار یک اندازه دسته‌ای از یک نوع منبع مشخص مورد نیاز است. همچنین می‌دانیم ورود منابع به محل پروژه در سه مقطع زمانی t_1 ، t_2 و t_3 می‌باشد. پس جهت انجام پروژه میزان ۱ واحد از این منبع مشخص در هر یک از مقاطع زمانی به صورت اندازه دسته‌ای به پروژه خواهد رسید. در ابتدا طبق برش سه افزازی حالت پروژه به صورت $(1^a 2^q 0^i)_{t_1}$ خواهد بود. در این حالت به دلیل وجود ۱ منبع تنها یکی از فعالیت‌ها قابلیت فعال شدن را خواهد داشت. حال طبق سیاست تخصیص منابع که بر اساس لیست فعالیت‌ها می‌باشد، فعالیت ۱ فعال خواهد شد. در نتیجه به علت کمبود منابع فعالیت ۲ در مجموعه فعالیت در صف قرار می‌گیرد. در این حالت میزان موجودی باقی‌مانده که مقدار آن صفر است به صورت 0^i نمایش داده می‌شود. در این نوع شبکه، انتقال از حالتی به حالت دیگر بر اساس زیرمجموعه‌هایی است که از مجموعه فعالیت‌های فعال در حالت اولیه اتخاذ می‌شود. برای درک بهتر موضوع مجدداً حالت $(1^a 2^q 0^i)_{t_1}$ را در نظر بگیرید. در این حالت تنها فعالیتی که در مجموعه فعالیت‌های فعال قرار خواهد گرفت فعالیت ۱ است یعنی؛ $E = \{1\}$ می‌باشد. بر اساس زیرمجموعه متشکل از این فعالیت حالات بعدی سیستم مشخص خواهد شد زیرا حالات بعدی سیستم تنها بر اساس اتمام و یا عدم اتمام فعالیت‌های فعال در حالت کنونی مشخص خواهد شد.

در صورتی که مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه به صورت 2^n می‌باشد. حال زیرمجموعه این مجموعه فعال که تک عضوی می‌باشد، به صورت $S = \{\{1\} \emptyset\}$ می‌باشد که هر عضو از زیرمجموعه S نشان‌دهنده انجام آن فعالیت است. به عنوان مثال اولین عضو از زیرمجموعه S نشانگر انجام فعالیت ۱ می‌باشد پس مطابق با تعریف ۱ داریم؛ $I(\beta(1)) = \{1\}$ و $O(\beta(1)) = \{3\}$ که نشان‌دهنده این است که در حالت بعدی فعالیت ۳ نیز مشاهده خواهد شد. در صورتی که منبع کافی جهت انجام فعالیت ۳ وجود داشته باشد

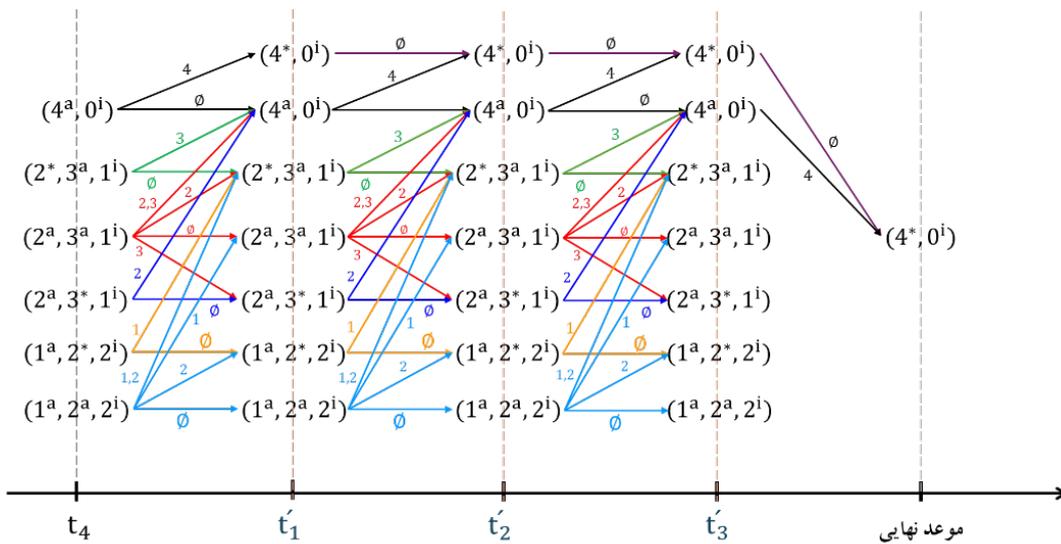
این فعالیت فعال و در غیر این صورت در صف باقی خواهد ماند. حال با انجام فعالیت ۱ حالت سیستم از $(1^a 2^q 0^i)_{t_1}$ به حالت $(2^a 3^q 0^i)_{t_2}$ انتقال خواهد یافت. در این انتقال، در زمان t_2 تأمین کننده منبع تجدیدنپذیر جدیدی به صورت اندازه دسته‌ای به پروژه تزریق می‌کند. حال طبق سیاست تخصیص منابع و اولویت در انجام فعالیت‌ها، فعالیت ۲ فعال خواهد شد. فعالیت ۳ نیز که در پی اتمام فعالیت ۱ مستعد فعال شدن است به دلیل کمبود منبع در مجموعه فعالیت‌های در صف قرار خواهد گرفت. در شکل ۵ حالات مختلف شبکه AOA پروژه موجود در شکل ۶ به صورتی نمایش داده شده است که هر فعالیت جهت انجام شدن به مقدار ۱ منبع نیاز دارد و همانطور که قبلاً بیان شد این منابع به صورت اندازه دسته‌ای در چهار بازه زمانی t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 به محل پروژه خواهد رسید.



شکل ۶. حالات مختلف پروژه شبکه AOA شکل ۴.

در شکل ۶ حالت $(1^a 2^a 0^i)_{t_2}$ را در نظر بگیرید. در این حالت هر دو فعالیت ۱ و ۲ فعال بوده و میزان منبع باقی مانده در این زمان صفر می‌باشد. در این حالت $E = \{12\}$ می‌باشد. زیرمجموعه این مجموعه فعال به صورت $S = \{\{1\}\{2\}\{12\}\emptyset\}$ می‌باشد پس با توجه به عناصر این زیرمجموعه، ۴ حالت جدید تشکیل خواهد شد. برای مثال، مطابق با شکل ۴ در حالت $(1^a 2^a 0^i)_{t_2}$ اگر هر دو فعالیت ۱ و ۲ تا زمان t_3 انجام پذیرند، حالت جدید به صورت $(2^* 3^a 0^i)_{t_3}$ خواهد بود. در این حالت فعالیت ۲ به صورت 2^* نمایش داده شده است که نشان‌دهنده اتمام این فعالیت می‌باشد.

در شکل ۶ آخرین منبع در زمان t_4 به محل پروژه خواهد رسید. در این زمان تمامی منابع مورد نیاز جهت اتمام فعالیت‌ها به پروژه منتقل شده است. زمان مابین t_4 و موعد نهایی را در نظر بگیرید. به دلیل وجود منابع کافی برای اتمام تمامی فعالیت‌ها، حالات سیستم نه تنها در این دو زمان تغییر می‌کنند، بلکه ممکن است در طول این بازه نیز دچار تغییر شوند. برای مثال، اگر فعالیت ۱ در فاصله بین t_4 و موعد نهایی به پایان برسد، فعالیت ۳ فعال خواهد شد، زیرا منابع کافی برای اجرای آن موجود است. در این شرایط، زمان به صورت پیوسته خواهد بود و بین زمان ورود آخرین منبع به پروژه و موعد نهایی، حالات دیگری نیز ممکن است به وجود آیند. برای تحلیل این شرایط می‌توان فاصله بین این دو زمان را به بازه‌های زمانی مساوی تقسیم کرد و مانند گذشته، سیستم را به صورت گسسته در نظر گرفت و با استفاده از زنجیره مارکوفی تحلیل نمود. اگر t_n زمان ورود آخرین منبع به پروژه باشد، با افزایش تعداد بازه‌های مابین t_n و موعد نهایی، زمان‌های گسسته به یک فضای پیوسته نزدیک خواهند شد. مطابق با شکل ۷ فاصله بین t_4 و موعد نهایی به بازه‌های زمانی مساوی تقسیم بندی شده است.



شکل ۷. تقسیم بندی بازه زمانی بین t_4 و موعد نهایی

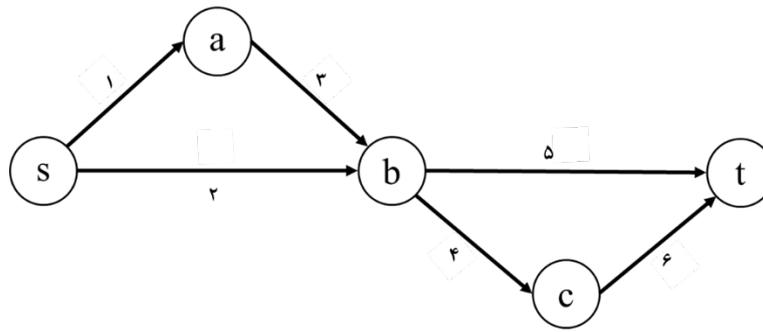
نکته دیگری که حائز اهمیت است احتمال انتقال از حالتی به حالت دیگر است. همانطور که قبلاً بیان شد، سیستم ما به صورتی است که در آن، نرخ انجام هر فعالیت از توزیع نمایی پیروی می کند. مجدداً انتقال از $(1^a 2^a 0^i)_{t_2}$ به $(2^* 3^a 0^i)_{t_3}$ را در نظر بگیرید. احتمال این انتقال که از توزیع نمایی پیروی می کند به صورت $(1 - e^{-\mu_2(t_3-t_2)})(1 - e^{-\mu_1(t_3-t_2)})$ است که بیانگر این است که هر دو فعالیت ۱ و ۲ قبل از زمان t_3 انجام پذیرفته اند. برای مثال انتقال از $(1^a 2^a 0^i)_{t_2}$ به $(1^a 2^* 1^i)_{t_3}$ را در نظر بگیرید. در این انتقال تنها فعالیت ۲ قبل از زمان t_3 انجام پذیرفته است پس احتمال انتقال به صورت $(1 - e^{-\mu_2(t_3-t_2)})(e^{-\mu_1(t_3-t_2)})$ خواهد بود. این روابط احتمالی بر اساس تعریف ۶ بدست می آید.

تعریف ۶. هر عضو از E ، فرضاً i که در بازه زمانی مابین t و t انجام پذیرد به مجموعه F منتقل شده که با احتمال $(1 - e^{-\mu_i(t-t)})$ محاسبه خواهد شد. اما اگر عضوی از مجموعه E ، فرضاً j ($j \cap i = \emptyset$) در این بازه پایان نپذیرد احتمال آن به صورت $(e^{-\mu_j(t-t)})$ بدست می آید. در نتیجه رابطه کلی آن به صورت رابطه ۸ می باشد:

$$\prod_{i \in F} (1 - e^{-\mu_i(t-t)}) \prod_{j \in (E-F)} (e^{-\mu_j(t-t)}) \tag{۸}$$

برای محاسبه تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه، ابتدا تمامی مسیرهای ممکن از گره آغازین تا گره پایانی تعیین می شوند. سپس احتمال وقوع هر حالت مختلف پروژه در این مسیرها محاسبه می شود و در نهایت، مجموع احتمالات هر یک از این مسیرها به عنوان تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه در نظر گرفته می شود. در ادامه الگوریتمی ارائه خواهد شد که باتوجه به فعالیت های پروژه و منابع مورد نیاز جهت انجام هر یک از این فعالیت ها، حالات مختلف پروژه را مشخص خواهد کرد. همچنین الگوریتم ارائه شده تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه را نیز محاسبه خواهد کرد.

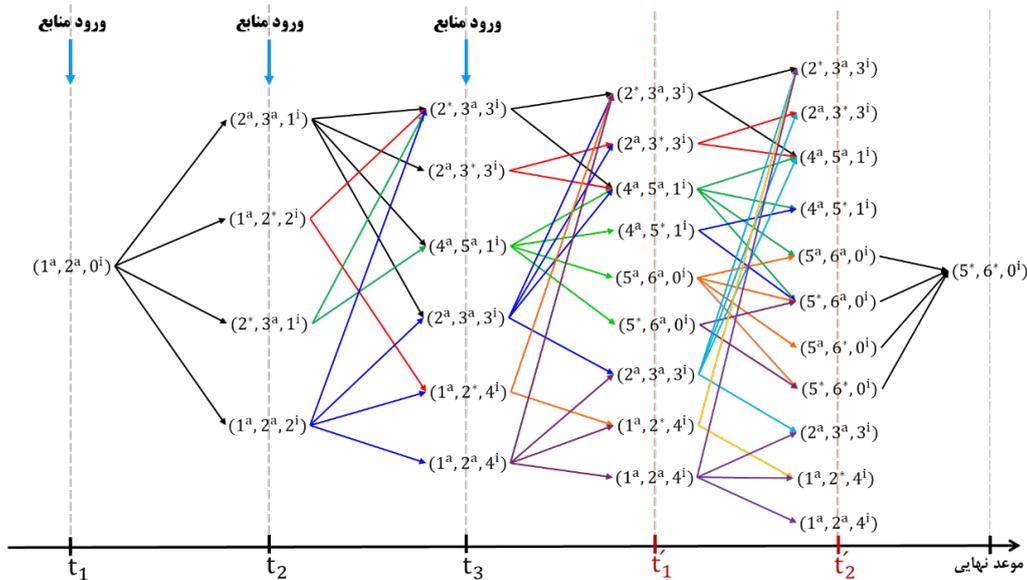
مثال ۱. در این مثال شبکه پروژه متشکل از شش فعالیت می باشد که طبق دو سناریو مختلف بررسی می شود (شکل ۸).



شکل ۸. شبکه AoA مثال ۱

الف. در این پروژه هر فعالیت تنها به یک دسته منبع r نیاز دارد. همچنین در ۶ بازه زمانی از t_1 تا t_6 در هر زمان تنها یک دسته از منبع r به محل پروژه تحویل داده می‌شود. در این مثال مابین زمان t_6 و موعد نهایی تنها یک زمان به عنوان زمان t وجود دارد. مطابق با زمان‌های تحویل منبع به محل پروژه، تمام برش‌های چهار افرازی قابل قبول مثال ۱، در جدول ۱ نشان داده شده است. در حالی که a ، q و ستاره (*) به ترتیب نشان دهنده فعالیت‌های فعال، غیرفعال و در صف می‌باشد. همچنین t نشان دهنده میزان منبع باقی مانده r در هر حالت می‌باشد.

ب. حال در صورتیکه در سه زمان t_1 ، t_2 و t_3 منابع به محل پروژه تحویل داده شود در هر زمان میزان منابع دسته‌ای برابر با ۲ می‌باشد. در صورتیکه مابین t_3 و موعد نهایی دو زمان t'_1 و t'_2 لحاظ شود، حالات مختلف پروژه مطابق با شکل ۹ نمایش داده می‌شود.



شکل ۹. تمامی حالات پروژه در بازه‌های زمانی گسسته مثال ۱. ب

جدول ۱. برش‌های چهار افزازی قابل قبول مثال ۱. الف.

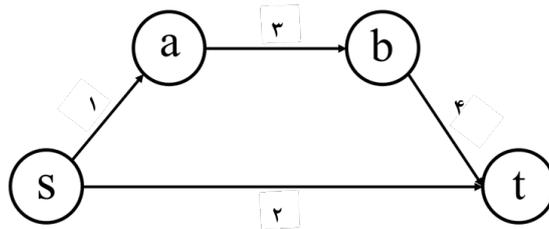
حالت	#	حالت	#	حالت	#
$(4^a 5^* 1^i)_{t_p}$	۲۵	$(2^* 3^a 1^i)_{t_\delta}$	۱۳	$(1^a 2^q .i)_{t_1}$	۱
$(5^* 6^a .i)_{t_p}$	۲۶	$(2^a 3^a 1^i)_{t_\delta}$	۱۴	$(2^a 3^q .i)_{t_r}$	۲
$(2^* 3^a 1^i)_{t_1}$	۲۷	$(1^a 2^* 1^i)_{t_\delta}$	۱۵	$(1^a 2^a .i)_{t_r}$	۳
$(2^a 3^a 1^i)_{t_1}$	۲۸	$(1^a 2^a 1^i)_{t_\delta}$	۱۶	$(2^* 3^a .i)_{t_r}$	۴
$(1^a 2^* 1^i)_{t_1}$	۲۹	$(4^a 5^a .i)_{t_\delta}$	۱۷	$(2^a 3^a .i)_{t_r}$	۵
$(1^a 2^a 4^i)_{t_1}$	۳۰	$(2^* 5^a 1^i)_{t_\delta}$	۱۸	$(1^a 2^* 1^i)_{t_r}$	۶
$(4^a 5^a 1^i)_{t_1}$	۳۱	$(2^* 3^a 1^i)_{t_p}$	۱۹	$(1^a 2^a 1^i)_{t_r}$	۷
$(2^* 5^a 1^i)_{t_1}$	۳۲	$(2^a 3^a 1^i)_{t_p}$	۲۰	$(2^* 3^a 1^i)_{t_r}$	۸
$(4^a 5^* 1^i)_{t_1}$	۳۳	$(1^a 2^* 1^i)_{t_p}$	۲۱	$(2^a 3^a 1^i)_{t_r}$	۹
$(5^* 6^a .i)_{t_1}$	۳۴	$(1^a 2^a 1^i)_{t_p}$	۲۲	$(1^a 2^* 1^i)_{t_r}$	۱۰
$(5^* 6^* .i)_{t_1}$	۳۵	$(4^a 5^a 1^i)_{t_p}$	۲۳	$(1^a 2^a 1^i)_{t_r}$	۱۱
$(5^* 6^* .i)_{DD}$	۳۶	$(2^* 5^a 1^i)_{t_p}$	۲۴	$(4^a 5^q .i)_{t_r}$	۱۲

مطابق با جدول ۲ تمامی برش‌های چهار افزازی قابل قبول که در شکل ۸ نیز مشاهده می‌شود، نشان داده شده است.

جدول ۲. برش‌های چهار افزازی قابل قبول مثال ۱. ب.

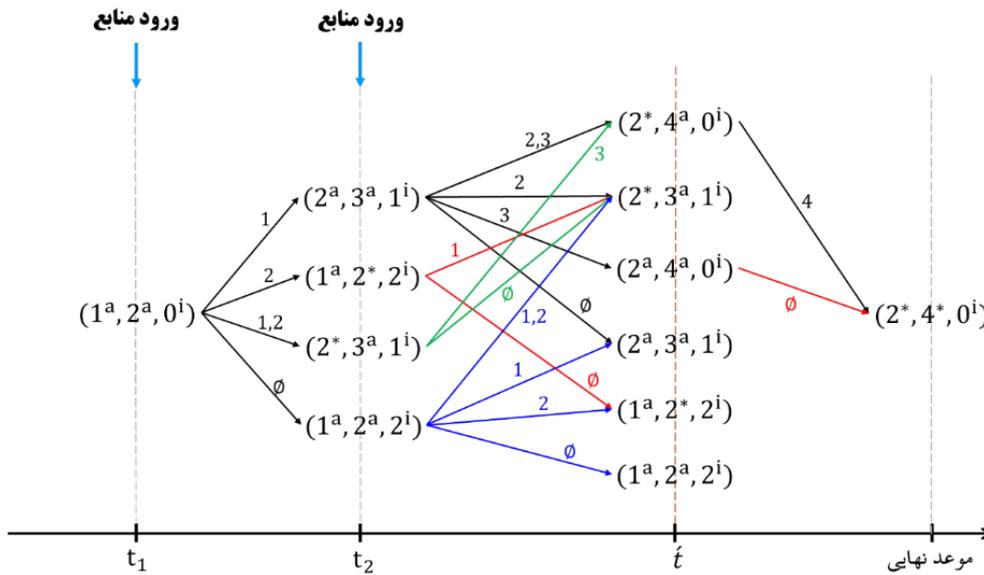
حالت	#	حالت	#	حالت	#
$(4^a 5^a 1^i)_{t_r}$	۲۳	$(2^* 3^a 1^i)_{t_1}$	۱۲	$(1^a 2^a .i)_{t_1}$	۱
$(4^a 5^* 1^i)_{t_r}$	۲۴	$(2^a 3^* 1^i)_{t_1}$	۱۳	$(2^a 3^a 1^i)_{t_r}$	۲
$(5^a 6^a .i)_{t_r}$	۲۵	$(4^a 5^a 1^i)_{t_1}$	۱۴	$(1^a 2^* 1^i)_{t_r}$	۳
$(5^* 6^a .i)_{t_r}$	۲۶	$(4^a 5^* 1^i)_{t_1}$	۱۵	$(2^* 3^a .i)_{t_r}$	۴
$(5^a 6^* .i)_{t_r}$	۲۷	$(5^a 6^a .i)_{t_1}$	۱۶	$(1^a 2^a 1^i)_{t_r}$	۵
$(5^* 6^* .i)_{t_r}$	۲۸	$(5^* 6^a .i)_{t_1}$	۱۷	$(2^* 3^a 1^i)_{t_r}$	۶
$(2^a 3^a 1^i)_{t_r}$	۲۹	$(2^a 3^a 1^i)_{t_1}$	۱۸	$(2^a 3^* 1^i)_{t_r}$	۷
$(1^a 2^* 1^i)_{t_r}$	۳۰	$(1^a 2^* 1^i)_{t_1}$	۱۹	$(4^a 5^a 1^i)_{t_r}$	۸
$(1^a 2^a 1^i)_{t_r}$	۳۱	$(1^a 2^a 1^i)_{t_1}$	۲۰	$(2^a 3^a 1^i)_{t_r}$	۹
$(5^* 6^* .i)_{DD}$	۳۲	$(2^* 3^a 1^i)_{t_r}$	۲۱	$(1^a 2^* 1^i)_{t_r}$	۱۰
		$(2^a 3^* 1^i)_{t_r}$	۲۲	$(1^a 2^a 1^i)_{t_r}$	۱۱

مثال ۲. مطابق با شکل ۱۰، فرض کنید شبکه پروژه ما متشکل از ۴ فعالیت باشد که هر فعالیت نیاز به یک اندازه دسته‌ای از منبع r دارد.



شکل ۱۰. شبکه AOA مثال ۲

مطابق با شبکه AOA پروژه، فرض می‌شود که زمان‌های ورود منابع به محل پروژه t_1 و t_2 می‌باشد که در هر زمان میزان ۲ واحد از منبع به صورت اندازه دسته‌ای به محل پروژه می‌رسد. همچنین برای ساده‌سازی محاسبات و امکان نمایش تابع قابلیت اطمینان، تنها یک زمان (t) بین t_2 و موعد نهایی در نظر گرفته شده است. حالات پروژه باتوجه به برش چهار افزازی مطابق با شکل ۱۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱۱. تمامی حالات پروژه در بازه‌های زمانی گسسته

در جدول ۳ تمام برش‌های چهار افزازی قابل قبول مثال ۲ ارائه شده است. مطابق با شکل ۹ سه مسیر از $(1^a, 2^a, 0^i)_{t_1}$ به $(2^*, 4^*, 0^i)_{Deadline}$ وجود دارد. باتوجه به مثال ۲ رابطه زیر مجموع احتمالات هر یک از این مسیرها را مشخص خواهد کرد. این رابطه به عنوان تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه معرفی می‌شود:

$$R(w) = (1 - e^{-\mu_1(t_2 - t_1)})(1 - e^{-\mu_3(t - t_2)})(1 - e^{-\mu_4(DD - t)}) \left[e^{-\mu_2(t_2 - t_1)}(1 - e^{-\mu_2(t - t_2)}) + (1 - e^{-\mu_2(t_2 - t_1)})(e^{-\mu_2(t - t_2)})(1 - e^{-\mu_2(DD - t)}) \right] \quad (9) \text{ رابطه}$$

جدول ۳. برش‌های چهار افرازی قابل قبول مثال ۲

#	حالت	#	حالت
۱	$(1^a 2^a \cdot i)_{t_1}$	۷	$(2^* 3^a 1^i)_t$
۲	$(2^a 3^a 1^i)_{t_2}$	۸	$(2^a 4^a \cdot i)_t$
۳	$(1^a 2^* 2^i)_{t_2}$	۹	$(2^a 3^a 1^i)_t$
۴	$(2^* 3^a \cdot i)_{t_2}$	۱۰	$(1^a 2^* 2^i)_t$
۵	$(1^a 2^a 2^i)_{t_2}$	۱۱	$(1^a 2^a 2^i)_t$
۶	$(2^* 4^a \cdot i)_t$	۱۲	$(2^* 2^* \cdot i)_{DD}$

تابع بهینه‌سازی هزینه-پاداش. در این پژوهش، یک تابع بهینه‌سازی برای تعیین موعد مقرر بهینه جهت اتمام پروژه ارائه شده است که هدف آن حداقل‌سازی مجموع هزینه‌های ناشی از تأخیر و حداکثرسازی پاداش‌های ناشی از اتمام زودهنگام پروژه می‌باشد. این تابع بر پایه‌ی تابع توزیع زمان اتمام پروژه بنا شده است و با تحلیل تغییرات احتمالاتی میان بازه‌های زمانی متوالی، زمان مطلوب اتمام پروژه را استخراج می‌نماید. فرض می‌شود که پروژه می‌تواند در بازه‌ی زمانی مشخصی میان حداقل زمان ممکن DD_{min} و حداکثر زمان ممکن DD_{max} به پایان برسد. موعد مقرر (Deadline) پروژه نیز با نماد DD_t نمایش داده می‌شود. در این بازه، احتمال اتمام پروژه در هر نقطه‌ی زمانی DD_i با استفاده از تابع قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه محاسبه می‌شود که آن را با $P(DD_i)$ نمایش می‌دهیم.

برای محاسبه هزینه و پاداش مربوط به انحراف از موعد مقرر، دو حالت متمایز در نظر گرفته می‌شود: حالت اول (اتمام پروژه دقیقاً در موعد مقرر یا DD_t): در این حالت، فرض می‌شود که نه هزینه‌ای بابت تأخیر و نه پاداشی بابت تعجیل به پروژه تعلق می‌گیرد؛ زیرا پروژه مطابق برنامه‌ریزی به پایان رسیده است.

حالت دوم (اتمام پروژه در زمانی غیر از موعد مقرر): اگر پروژه دیرتر از موعد مقرر DD_t تکمیل شود، در هر بازه زمانی $[DD_t, DD_{max}]$ میزان افزایش احتمال اتمام پروژه، یعنی $(P_{i+1} - P_i)$ ، در مقدار جریمه‌ی تأخیر J_i ضرب شده و به عنوان هزینه تأخیر در آن بازه در نظر گرفته می‌شود.

در مقابل، اگر پروژه زودتر از موعد مقرر به اتمام برسد، برای هر بازه زمانی $[DD_{min}, DD_t]$ ، کاهش احتمالات $(P_{i+1} - P_i)$ در مقدار پاداش اتمام زودهنگام R_i ضرب می‌گردد و مقدار پاداش در آن بازه محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که بازه‌ی زمانی $[DD_{min}, DD_{max}]$ ، بازه‌ای است که پس از ورود آخرین دسته از منابع به پروژه مورد توجه قرار می‌گیرد، به گونه‌ای که خارج از این بازه احتمال تکمیل پروژه ناچیز یا صفر فرض می‌شود. تابع بهینه‌سازی تعریف‌شده با تجمیع مقادیر هزینه‌ها و پاداش‌ها در بازه‌های زمانی مختلف، می‌تواند بهترین موعد مقرر را به نحوی تعیین کند که عواید خالص پروژه (کاهش هزینه یا افزایش پاداش) به حداکثر برسد. رابطه‌ی ریاضی این تابع در معادله (۱۰) ارائه شده است.

$$C(DD_t) = \sum_{i=DD_{min}}^{DD_t-1} (P_{i+1} - P_i) \times R - \sum_{i=DD_t}^{DD_{max}} (P_{i+1} - P_i) \times J \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

در ادامه با استفاده از مثال عددی و با توجه به تابع بهینه‌سازی هزینه-پاداش موعد مقرر اتمام پروژه را مشخص کرده به طوری که کمترین هزینه را در بر داشته باشد.

۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

مثال. مثال بخش ۱ الف را مجدداً در نظر بگیرید به طوری‌که نرخ سرویس‌دهی منابع تجدیدپذیر جهت انجام هر فعالیت مطابق با جدول ۴ می‌باشد. همچنین طبق قرارداد منعقد شده بین پیمانکار و تامین‌کننده منابع به صورت اندازه دسته‌ای در زمانهای t تا t_6 که این مقادیر به ترتیب برابر است با ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۰ می‌باشد به پروژه تحویل داده میشوند. از طرفی بین زمان t_6 و موعد مقرر زمان t_1 لحاظ شده است. با توجه به ماهیت پروژه و عدم قطعیت در آن حداقل و حداکثر زمان اتمام پروژه ۱۵ تا ۲۰ ماه برآورد شده است. " متن فعلی: "برای تشریح کاربرد عینی مدل پیشنهادی، در این بخش یک مطالعه موردی مبتنی بر یک پروژه ساخت مازول پیش‌ساخته صنعتی، مطابق با شبکه فعالیت (AOA) نشان داده شده در شکل ۷، تحلیل می‌گردد. فعالیت‌های اصلی این پروژه عبارتند از:

- فعالیت ۱: طراحی و آماده‌سازی شاپ دراوینگ‌ها
- فعالیت ۲: تأمین و آماده‌سازی فونداسیون
- فعالیت ۳: ساخت اسکلت فولادی (وابسته به شاپ دراوینگ)
- فعالیت ۴: نصب پنل‌های دیواری (وابسته به فونداسیون و اسکلت)
- فعالیت ۵: نصب تأسیسات مکانیکی (وابسته به فونداسیون و اسکلت)
- فعالیت ۶: عملیات نهایی و تست (وابسته به نصب پنل‌ها)

نرخ سرویس‌دهی (μ) هر فعالیت، که نشان‌دهنده توان اجرایی منابع تجدیدپذیر (مانند تیم‌های کاری) است، در جدول ۴ ارائه شده است. چالش اصلی این پروژه، مدیریت منبع تجدید ناپذیر کلیدی، یعنی «قطعات فولادی سفارشی» است. طبق قرارداد تأمین، این قطعات در ۶ بیج (دسته) مجزا و در زمان‌های t_1 تا t_6 به ترتیب ماه‌های ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۰ به کارگاه تحویل داده می‌شوند. کمبود این قطعات در هر مرحله، مانع از شروع فعالیت‌های وابسته (حتی در صورت آماده بودن پیش‌نیازها) می‌شود. قرارداد پروژه شامل بند جریمه تأخیر و پاداش تعجیل است و برآوردها نشان می‌دهد زمان واقعی اتمام پروژه بین ۱۵ تا ۲۰ ماه خواهد بود. هدف، یافتن موعد مقرر بهینه‌ای است که عایدی مالی پیمانکار را با توجه به این محدودیت‌ها، حداکثر نماید. حال باتوجه به این مفروضات، قابلیت اطمینان زمان اتمام پروژه برای هر یک از مواعدهای مقرر محاسبه شده و باتوجه به تابع بهینه‌سازی هزینه-پاداش، هزینه و یا پاداش هر کدام از این احتمالات بدست خواهد آمد. در پایان موعد مقرر اتمام پروژه‌ای که کمترین هزینه را دارا بود به عنوان زمان اتمام پروژه انتخاب می‌شود. در جدول ۵ این موارد مشخص شده است.

جدول ۴. نرخ سرویس‌دهی

فعالیت (a)	μ_a
۱	$1/2$
۲	$1/2$
۳	$1/3$
۴	$1/3$
۵	$1/2$
۶	$1/4$

باتوجه به جدول ۵، بهترین زمان به عنوان موعد مقرر اتمام پروژه ماه ۱۶ ام است زیرا در این ماه حداکثر عایدی بدست خواهد آمد.

جدول ۵. محاسبه عایدی موعد مقرر

شماره	زمان t_1	موعد مقرر (ماه)	احتمال موعد مقرر (%)	عایدی (هزار دلار)
۱	۱۴/۵	۱۵	۶۹٪	-۰/۸
۲	۱۵	۱۶	۷۵٪	۰/۸
۳	۱۵/۵	۱۷	۸۴٪	-۰/۷
۴	۱۶	۱۸	۹۲٪	-۱/۳
۵	۱۶/۵	۱۹	۹۴٪	-۰/۳
۶	۱۷	۲۰	۹۵٪	-۰/۲

حال در صورتیکه نرخ سرویس دهی هر فعالیت کاهش ۲۰٪ داشته باشد، حداکثر عایدی و احتمال اتمام پروژه در موعد مقرر نیز مطابق با جدول ۶ تغییر خواهد کرد و بهترین زمان به عنوان موعد مقرر اتمام پروژه ماه ۱۸ خواهد بود.

جدول ۶. محاسبه عایدی موعد مقرر با توجه به کاهش نرخ سرویس دهی

شماره	زمان t_1	موعد مقرر (ماه)	احتمال موعد مقرر (%)	عایدی (هزار دلار)
۱	۱۴/۵	۱۵	۵۵٪	-۰/۱
۲	۱۵	۱۶	۶۳٪	-۰/۶
۳	۱۵/۵	۱۷	۷۵٪	-۰/۱
۴	۱۶	۱۸	۸۴٪	۰/۶
۵	۱۶/۵	۱۹	۹۱٪	۰/۱
۶	۱۷	۲۰	۹۳٪	۰

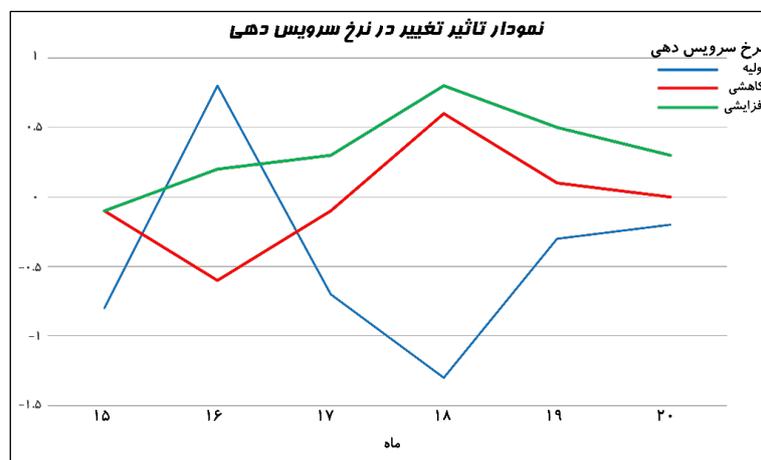
جدول ۶ نتایج سناریوی کاهش ۲۰ درصدی نرخ سرویس دهی را نشان می‌دهد که به معنای کندتر شدن اجرای فعالیت‌ها است. این کاهش، تأثیر مستقیم و قابل توجهی بر نتایج دارد: احتمال تکمیل پروژه در تمام موعداها کاهش یافته است؛ به عنوان مثال، احتمال در ماه ۱۶ از ۷۵٪ (در حالت پایه) به ۶۳٪ کاهش یافته است. به دلیل این کاهش شدید، انتخاب موعداهای مقرر خوشبینانه (مانند ماه ۱۵ و ۱۶) دیگر اقتصادی نبوده و منجر به زیان (عایدی $-۰/۱$ و $-۰/۶$ هزار دلار) می‌شود. در نتیجه، نقطه بهینه پروژه (حداکثر عایدی) از ماه ۱۶ (در سناریوی پایه) به ماه ۱۸ (با عایدی $۰/۶$ هزار دلار) منتقل می‌شود. این نشان می‌دهد که وقتی توان اجرایی پروژه کاهش می‌یابد، استراتژی بهینه به سمت انتخاب موعد مقرر محافظه‌کارانه‌تر جابجا می‌شود تا از جرایم سنگین تأخیر جلوگیری شود.

در مقابل، جدول ۷ تأثیر افزایش ۲۰ درصدی نرخ سرویس دهی (سریع‌تر شدن اجرای فعالیت‌ها) را بررسی می‌کند. همانطور که انتظار می‌رفت، احتمال تکمیل پروژه در تمامی موعداها به طور قابل توجهی افزایش یافته است (مثلاً در ماه ۱۶ از ۷۵٪ به ۸۵٪ رسیده است). این بهبود، ریسک انتخاب موعداهای زودتر را کاهش داده است. جالب توجه است که با وجود بهبود کلی، موعد مقرر بهینه، مشابه سناریوی کاهش، به ماه ۱۸ (با عایدی $۰/۸$ هزار دلار) منتقل شده است. تحلیل تابع هزینه-پاداش نشان می‌دهد که در این سناریو، اگرچه پروژه سریع‌تر شده، اما انتخاب ماه ۱۸ بهترین توازن را میان کسب پاداش تعجیل و اطمینان از تکمیل (۹۴٪ احتمال) ایجاد کرده و حداکثر سود ممکن را به همراه دارد.

جدول ۷. محاسبه عایدی موعد مقرر با توجه به افزایش نرخ سرویس دهی

شماره	زمان t_1	موعد مقرر (ماه)	احتمال موعد مقرر (%)	عایدی (هزار دلار)
۱	۱۴/۵	۱۵	۷۹٪	-۰/۱
۲	۱۵	۱۶	۸۵٪	۰/۲
۳	۱۵/۵	۱۷	۹۰٪	۰/۳
۴	۱۶	۱۸	۹۴٪	۰/۸
۵	۱۶/۵	۱۹	۹۶٪	۰/۵
۶	۱۷	۲۰	۹۷٪	۰/۳

با توجه به توضیحات ارائه شده، تأثیر تغییر نرخ سرویس دهی در نمودار نشان داده شده در شکل ۱۲ قابل مشاهده است.



شکل ۱۲. تأثیر تغییر نرخ سرویس دهی

شکل ۱۲، نتایج تحلیل حساسیت جداول ۵، ۶ و ۷ را به صورت بصری یکپارچه کرده و درک عمیق‌تری از تأثیر نرخ سرویس دهی بر استراتژی انتخاب موعد مقرر ارائه می‌دهد.

- سناریوی پایه (خط آبی): این نمودار دارای یک نقطه اوج بسیار تیز و حساس در ماه ۱۶ است. انتخاب این ماه سودآور است، اما هرگونه انحراف اندک (انتخاب ماه ۱۷ یا ۱۸) منجر به زیان شدید می‌شود و نشان‌دهنده یک استراتژی پر ریسک است.
- سناریوی کاهش (خط قرمز): با کند شدن پروژه، نمودار به سمت راست (موعدهای دیرتر) منتقل شده و بسیار هموارتر شده است. نقطه بهینه به ماه ۱۸ (با عایدی ۰.۶ هزار دلار) منتقل شده و نشان می‌دهد که در پروژه‌های کند، استراتژی بهینه «محافظه‌کارانه» بوده و پتانسیل سودآوری کلی نیز کاهش می‌یابد.
- سناریوی افزایش (خط سبز): با سریع‌تر شدن پروژه، نمودار نه تنها به سمت بالا (سودآوری بیشتر) حرکت کرده، بلکه بسیار مقاوم‌تر شده است. اگرچه نقطه بهینه در ماه ۱۸ قرار دارد (۰.۸ هزار دلار)، اما انتخاب موعدهای دیگر (مانند ۱۷، ۱۹ و ۲۰) همچنان منجر به عایدی مثبت و قابل قبول می‌شود. این بدان معناست که افزایش نرخ سرویس دهی، پروژه را نه تنها سودآورتر، بلکه در برابر خطاهای برآورد زمان تحویل نیز مقاوم‌تر می‌سازد و ریسک تصمیم‌گیری مدیر پروژه را به شدت کاهش می‌دهد.

بحث و بررسی

یافته‌های این پژوهش، شکاف میان زمان‌بندی فنی پروژه و بهینه‌سازی اقتصادی آن را پر می‌کند. در حالی که مطالعات پیشین (همانطور که در بخش پیشینه تحقیق اشاره شد) اغلب عدم قطعیت زمانی و مدیریت منابع را به صورت مجزا بررسی کرده‌اند، مدل یکپارچه حاضر نشان می‌دهد که پویایی تخصیص منابع تجدید ناپذیر (به‌ویژه سیاست سفارش‌دهی دسته‌ای چگونه مستقیماً بر تابع احتمال اتمام پروژه تأثیر می‌گذارد. مهم‌ترین نتیجه مدیریتی این تحقیق، تفکیک «محتمل‌ترین» زمان اتمام از «سودآورترین» زمان تحویل است. نتایج نشان داد که انتخاب موعد مقرر متفاوت از زمان میانه (مثلاً ۵٪ زودتر) می‌تواند سودآوری را به طور قابل توجهی (تا ۱۵٪) افزایش دهد، که این امر ناشی از ماهیت غیرخطی تابع هزینه-پاداش است. علاوه بر این، تحلیل حساسیت (شکل ۱۱) یک بینش مدیریتی کلیدی را آشکار ساخت: افزایش نرخ سرویس‌دهی (سرپرتر شدن فعالیت‌ها) نه تنها پروژه را سودآورتر می‌کند، بلکه با مقاوم ساختن نمودار عایدی، ریسک تصمیم‌گیری مدیر پروژه را در انتخاب موعد مقرر کاهش می‌دهد.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

این پژوهش نشان داد که ادغام مدل‌سازی مارکوفی (برای محاسبه قابلیت اطمینان زمانی) با یک تابع هزینه-پاداش، چارچوبی مؤثر برای تعیین موعد مقرر بهینه پروژه در شرایط عدم قطعیت منابع و زمان فراهم می‌کند. یافته‌های کلیدی تحلیل نتایج نشان داد که زمان بهینه تحویل، لزوماً برابر با زمان میانه یا محتمل‌ترین زمان اتمام نیست، بلکه یک نقطه توازن اقتصادی است که ریسک جریمه تأخیر را در برابر پاداش تحویل زودتر متعادل می‌کند (چنانکه در مطالعه موردی، تحویل ۵ درصد زودتر از میانه، ۱۵ درصد سود خالص را افزایش داد). علاوه بر این، تحلیل حساسیت مشخص کرد که توان اجرایی منابع (نرخ سرویس‌دهی) چگونه استراتژی بهینه را تغییر می‌دهد؛ کاهش این نرخ، نقطه بهینه را به سمت مواعدهای محافظه‌کارانه‌تر سوق می‌دهد، در حالی که افزایش آن، پروژه را در برابر خطاهای برآورد مقاوم‌تر می‌سازد. قابلیت کاربردی اصلی این تحقیق برای مدیران پروژه و پیمانکاران، فراهم آوردن یک ابزار تصمیم‌گیری کمی است. این مدل به آن‌ها اجازه می‌دهد تا از روش‌های سنتی مبتنی بر زمان (مانند مسیر بحرانی) فراتر رفته و موعد مقرر را انتخاب کنند که مستقیماً «حداکثر عایدی مالی مورد انتظار» را هدف قرار می‌دهد. همچنین این چارچوب امکان ارزیابی سناریوهای مختلف تخصیص منابع و تأثیر آن‌ها بر سودآوری نهایی پروژه را فراهم می‌سازد. در ادامه، پیشنهاداتی برای مطالعات آتی ارائه می‌شود. این پژوهش به پروژه‌هایی که برای انجام هر فعالیت تنها به یک نوع منبع نیاز دارند، پرداخته است؛ اما در پروژه‌های واقعی، معمولاً نیاز به منابع متنوع‌تری وجود دارد. بنابراین، بررسی پروژه‌هایی که نیاز به منابع مختلف دارند، می‌تواند موضوع مهمی برای تحقیقات آینده باشد. علاوه بر این، در این مقاله فرض شده است که هر ایستگاه کاری تنها یک خدمت‌دهنده دارد؛ این فرض می‌تواند به‌طور قابل توجهی گسترش یابد تا شامل مدل‌هایی با چندین خدمت‌دهنده برای هر ایستگاه کاری شود. همچنین، تحلیل‌های پیچیده‌تر مانند در نظر گرفتن روابط متقابل میان فعالیت‌ها و منابع می‌تواند دقت مدل‌ها را بهبود بخشد و نتایج بهینه‌تری برای زمان‌بندی و تخصیص منابع به دست دهد.

تعارض منافع. برای ارائه مطالب و نگارش این مقاله هیچ‌گونه کمک مالی از هیچ فرد، نهاد و سازمانی دریافت نشده است و نتایج و دستاوردهای این مقاله به نفع یا ضرر سازمان یا فردی خاص نخواهد بود. حضور نویسندگان در این پژوهش به عنوان شاهدهی بی‌طرف ولی متخصص بوده است و نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منافی ندارند.

منابع

1. Abdelkader, Y. H. (2004). Evaluating project completion times when activity times are Weibull distributed. *European journal of operational research*, 157(3), 704–715.
2. Adlakha, V. G., & Kulkarni, V. G. (1989). A classified bibliography of research on stochastic PERT networks: 1966–1987. *INFOR: information systems and operational research*, 27(3), 272–296.

3. Aliyu, A. M. (2012). Project management using critical path method (CPM): a pragmatic study. *Global journal of pure and applied sciences*, 18(3-4), 197-206.
4. Andiyan, A., Putra, R. M., Rembulan, G. D., & Tannady, H. (2021). Construction project evaluation using cpm-crashing, cpm-pert and ccpm for minimize project delays. *Journal of physics: conference series (Vol. 1933, p. 12096)*. IOP Publishing.
5. Azaron, A., & Ghomi, S. M. T. F. (2008). Lower bound for the mean project completion time in dynamic PERT networks. *European journal of operational research*, 186(1), 120-127.
6. Azaron, A., & Tavakkoli-Moghaddam, R. (2007). Multi-objective time-cost trade-off in dynamic PERT networks using an interactive approach. *European journal of operational research*, 180(3), 1186-1200.
7. Azaron, A., Fynes, B., & Modarres, M. (2011). Due date assignment in repetitive projects. *International journal of production economics*, 129(1), 79-85.
8. Azaron, A., Kianfar, F. (2001). An algorithm for selecting the shortest path in queueing networks in steady state. *Technical Faculty Journal*, 35(2). (In Persian) <https://ideas.repec.org/a/eee/ejores/v144y2003i1p138-156>.
9. Bayani Majd, A., Noori, S., Yaghoubi, S., & Mohamadi, A. (2017). A Mathematic Model for Green Supply Chain of Project Construction considering Project Scheduling. *Journal of Industrial Management Perspective*, 6(4), 123-156. (In Persian)
10. Bordley, R. F., Keisler, J. M., & Logan, T. M. (2019). Managing projects with uncertain deadlines. *European journal of operational research*, 274(1), 291-302.
11. Charnes, A., Cooper, W. W., & Thompson, G. L. (1964). Critical path analyses via chance constrained and stochastic programming. *Operations research*, 12(3), 460-470.
12. Chen, W. (2022). Reliability optimization analysis of enterprise financial management system using the markov model. *Mobile information systems*, 2022(1), 4829902.
13. Clough, R. H., Sears, G. A., & Sears, S. K. (2000). *Construction project management*. John Wiley & Sons.
14. Eisner, H. (1962). A generalized network approach to the planning and scheduling of a research project. *Operations research*, 10(1), 115-125.
15. Esquível, M. L., & Krasii, N. P. (2025). Statistics for Continuous Time Markov Chains, a Short Review. *Axioms*, 14(4), 283.
16. Ferdosi, J. A., & Yaghoubi, S. (2020). Providing a Mathematical Model for Periodic Projects Evaluation and Rewarding in Matrix Organizations (Case Study: Iran Argham Corporation), *Journal of Industrial Management Perspective*, 10 (137), 65-88. (In Persian)
17. Flyvbjerg, B. (2021). Top ten behavioral biases in project management: An overview. *Project management journal*, 52(6), 531-546.
18. Gurtu, A., & Johnny, J. (2021). Supply chain risk management: Literature review. *Risks*, 9(1), 16.
19. Herroelen, W., & Leus, R. (2005). Project scheduling under uncertainty: Survey and research potentials. *European journal of operational research*, 165(2), 289-306.
20. Hosseinian, S. M., Arjomand, A., Li, C. Q., & Zhang, G. (2022). Developing a model for assessing project completion time reliability during construction using time-dependent reliability theory. *Journal of construction engineering and management*, 148(4), 4022006.
21. Hussain, A., & Hussain, I. (2023). Modeling and multi-objective optimization of time, greenhouse gas emissions, and resources for sustainable construction projects. *Sustainable production and consumption*, 39, 269-284.
22. Khademvatani, A., Shokouhi, M. R., & Naami, F. (2024). Comprehensive Risk Identification and Prioritization for Engineering, Procurement, and Construction (EPC) Projects: A Case of Karoon Oil and Gas Exploitation Company. *Journal of Industrial Management Perspective*, 14(4), 257-292. (In Persian)
23. Kleinrock, L. (1976). Computer applications. *Queueing systems*, (3).
24. Lenfle, S. (2008). Exploration and project management. *International journal of project management*, 26(5), 469-478.
25. Ludwig, A., Möhring, R. H., & Stork, F. (2001). A computational study on bounding the makespan distribution in stochastic project networks. *Annals of operations research*, 102, 49-64.
26. Martin, J. J. (1965). Distribution of the time through a directed, acyclic network. *Operations research*, 13(1), 46-66.
27. Mostafa, K., Ojulari, S., & Hegazy, T. (2022). Enhanced repetitive scheduling formulation for meeting deadlines and resource constraints in linear and scattered projects. *Canadian journal of civil engineering*, 50(3), 172-183.
28. Mubarak, S. A. (2015). *Construction project scheduling and control*. John Wiley & Sons.
29. Müller, R., Locatelli, G., Holzmann, V., Nilsson, M., & Sagay, T. (2024). Artificial intelligence and project management: Empirical overview, state of the art, and guidelines for future research. *Project management journal*, 55(1), 9-15.

30. Pang, N., Jia, P., Liu, P., Yin, F., Zhou, L., Wang, L., ... Wang, X. (2020). A fuzzy Markov model for risk and reliability prediction of engineering systems: a case study of a subsea wellhead connector. *Applied sciences*, 10(19), 6902.
31. Peiravi, A., Ardakan, M. A., & Zio, E. (2020). A new Markov-based model for reliability optimization problems with mixed redundancy strategy. *Reliability engineering & system safety*, 201, 106987.
32. Pryke, S., & Smyth, H. (2012). *The management of complex projects: a relationship approach*. John Wiley & Sons.
33. Rajeevan, A. K., Shouri, P. V., & Nair, U. (2018). Markov modeling and reliability allocation in wind turbine for availability enhancement. *Life cycle reliability and safety engineering*, 7, 147–157.
34. Sánchez-Herguedas, A., Mena-Nieto, A., Crespo-Márquez, A., & Rodrigo-Muñoz, F. (2024). Finite time preventive maintenance optimization by using a Semi-Markov process with a degraded state. A case study for diesel engines in mining. *Computers & industrial engineering*, 190, 110083.
35. Teymouri, E., & Mousavi, F. S. (2011). A genetic algorithm for inventory planning model in project supply chain. *Industrial Engineering Journal*, 45(1), 45-58. (In Persian) <https://sid.ir/paper/166395/fa>.
36. Turner, J. R., & Simister, S. J. (2001). Project contract management and a theory of organization. *International journal of project management*, 19(8), 457–464.
37. Yaghoubi, S., Noori, S., Azaron, A., & Tavakkoli-Moghaddam, R. (2011). Resource allocation in dynamic PERT networks with finite capacity. *European Journal of Operational Research*, 215(3), 670-678.
38. Yaghoubi, S., Noori, S., Azaron, A., & Fynes, B. (2015). Resource allocation in multi-class dynamic PERT networks with finite capacity. *European journal of operational research*, 247(3), 879–894.
39. Yamamoto, K., & Chen, L. (2024). Integrating fuzzy logic and Markov chains for resilient project scheduling. *International Journal of Project Systems and Engineering*, 22(3), 145–162.
40. Ye, Y., Grossmann, I. E., Pinto, J. M., & Ramaswamy, S. (2019). Modeling for reliability optimization of system design and maintenance based on Markov chain theory. *Computers & chemical engineering*, 124, 381–404.