چشم‌انداز مدیریت صنعتی
شماره ۲۸ ـ زمستان ۱۳۹۶
ص‌ص ۱۰۵ – ۷۷

ارائه مدل کنترل موجودی برای اقلام منسوخ‌شدنی با لحاظ‌کردن تأخیر در پرداخت و تورم

حسن زمانی باجگانی*، محمدرضا غلامیان**

چکیده

در سیستم کنترل موجودی کلاسیک، درآمد فروش محصول در لحظه تحویل کالا فوراً دریافت می‌شود و کالاها می‌توانند عمر نامحدود داشته باشند؛ اما در دنیای واقعی کالاهایی وجود دارند که به مرور زمان بر اثر به‌وجودآمدن فناوری جدید ارزش خود را از دست می دهند که به‌عنوان کالاهای منسوخ‌شدنی شناخته می‌شوند. همچنین برای ترغیب خریدار، فروشنده می‌تواند به خریدار این اجازه را بدهد تا هزینه خرید را با تأخیر پرداخت کند. در این پژوهش یک مسئله کنترل موجودی منسوخ‌شدنی با سیاست پرداخت معوقه در شرایط تورمی با هدف دستیابی به حداقل هزینه بررسی خواهد شد. نتایج عددی نیز در یک مطالعه موردی واقعی صنعت خرده‌فروشی تلفن همراه ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد با کاهش دوره منسوخ‌شدن با توجه به اینکه ریسک منسوخ‌شدن کالا افزایش می‌یابد، مقدار سفارش بهینه کاهش می‌یابد نتایج حاکی از آن است که استفاده ترکیبی از سیاست‌های مدیریت موجودی با درنظرگرفتن تأخیر در پرداخت باعث کاهش هزینه‌های موجودی می‌شود.

کلیدواژه‌ها: کنترل موجودی؛ تأخیر در پرداخت؛ منسوخ‌شدن؛ تورم.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۵/۳۱، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۰۵.

* دانشجوی دکتری، دانشگاه علم و صنعت.
** استادیار، دانشگاه علم و صنعت (نویسنده مسئول).
Email: gholamian@iust.ac.ir

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر پژوهشگران در حوزه کنترل موجودی بیش از پیش به بررسی مسائل عملکردی حاکم بر فضای رقابتی حاضر، روی آورده‌اند. این فضای رقابتی فروشندگان را بر آن داشته است که برای افزایش میزان فروش و ایجاد مزیت رقابتی امکانات و امتیازات ویژه‌ای در اختیار خریدار قرار دهند. پرداخت معوقه یکی از امتیازات برای ترغیب خریدار به شمار می‌رود. مدل کلاسیک سفارش اقتصادی (EOQ) بر این فرض استوار است که هزینه خرید بلافاصله پس از سفارش‌دهی پرداخت می‌شود حال آنکه، همانگونه که اشاره شد عموما تامین‌کنندگان بازه‌ای زمانی برای پرداخت هزینه خرید در اختیار خریدار قرار می‌دهند که نه‌تنها موجب ترغیب وی و افزایش میزان خرید می‌شود بلکه این امکان را به او می‌دهد که با استفاده از این فرصت، هزینه سرمایه خود را کاهش دهد.

در این فاصله زمانی، خریدار قادر است با فروش محصولات خریداری شده از تامین‌کننده، درآمد حاصل را سرمایه‌گذاری کرده و سود خود را افزایش دهد. از طرفی اغلب محصولات، ارزش تجاری خود را در طول زمان از دست می‌دهند که منجر به کاهش تقاضای آن محصول می‌شود و برای برخی محصولات سرعت این فرایند فراتر از حد معمول است. این محصولات اصطلاحاً محصولات منسوخ‌شدنی می‌باشند.

در بسیاری از بازارها، به‌ویژه در صنایع با فناوری بالا، محصولات بعد از چند دوره تولید با ایجاد فناوری جدید منسوخ می‌شوند؛ همچنین برخی محصولات نیز با ممنوعیت محیط‌زیست جهانی در مورد استفاده از کالایی خاص مواجه می‌شوند و به‌ناچار با منسوخ‌شدگی مواجه می‌شوند.

بنابراین با توجه به کاهش تقاضا و کاهش ارزش تجاری این نوع محصولات، تامین‌کننده به دنبال سیاستی برای فروش بیشتر و سریع آنها می‌باشد که یکی از این سیاست‌ها فروش کالا با در نظر گرفتن تاخیر در پرداخت می‌باشد. مطالعات‌انجام شده در این حوزه تاکنون پرداخت معوقه را در نظر نگرفته‌اند؛ درحالی‌که مطالعه کنترل موجودی کالاهای منسوخ‌شدنی با پرداخت معوقه جایگاهی ویژه‌ای دارد.

پژوهش‌های کنترل موجودی تا اوایل ۱۹۶۰ عمدتاً نشان می‌دهد که تمامی اقلام دارای طول عمر نامتناهی و کاربرد تغییرناپذیر هستند. بسیاری از کالاها به‌اشتباه در این فرض قرار گرفته اند مانند ۱. اقلام فناپذیر[1] مانند الکل، نفتالین و غیره که به مرور زمان تبخیر می‌شوند؛ ۲- اقلام فسادپذیر[2] مانند میوه و سبزیجات که به‌مرور زمان فاسد می‌شوند؛ ۳- اقلام

1. Decay
2. Perishable

منسوخ‌شدنی[1] که عمدتاً محصولاتی با تکنولوژی بالا[2] هستند و به‌مرور زمان از مد می‌افتند. در مورد اقلام فسادپذیر و اقلام فناپذیر پژوهش‌های فراوانی صورت گرفته است؛ اما در مورد کالاهای منسوخ‌شدنی به‌نسبت پژوهش‌های محدودتری وجود دارد.

در این پژوهش، ابتدا در بخش دوم مبانی نظری و پیشینه پژوهش مورد بحث و بررسی قرار می گیرد و سپس در قسمت سوم مدل‌سازی مسئله بر روی کالای منسوخ‌شدنی ناگهانی برای دو حالت دوره پرداخت بعد از سیکل بهینه سفارش‌دهی و دوره پرداخت قبل از سیکل بهینه سفارش‌دهی معرفی می‌شود و برای نزدیک‌کردن مسئله به شرایط واقعی، مدل‌سازی هزینه‌ها با توجه به نرخ تورم انجام می‌گیرد؛ سپس در بخش چهارم حل مسئله و تحلیل حساسیت بر روی نمونه داده‌های ارائه‌شده انجام می‌شود. در بخش پنجم نیز جمع‌بندی و ارائه نتایج صورت می‌گیرد.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

پژوهش‌هایی که در مورد منسوخ شدن کالا انجام گرفته است را می توان به‌صورت زیر موردبحث قرار داد:

در یکی از نخستین مدلسازی‌ها در این زمینه، کوبرت و همکاران (۱۹۹۶) با درنظرگرفتن طول عمر نمایی محصولات تا زمان منسوخ‌شدن ناگهانی، مدل کنترل موجودی کالاهای منسوخ‌شدنی را ارائه کردند. آن‌ها سپس مدل ارائه‌شده را برای حالتی که کمبود وجود داشته باشد و برای حالتی که تأخیر در تأمین وجود داشته باشد با درنظرگرفتن تابع طول عمر کلی محصول، تعمیم دادند [۳]. در ادامه در بیشتر پژوهش‌های انجام‌شده درباره کالای منسوخ‌شدنی، مدل ارائه‌شده توسعه داده شد. ازجمله پژوهش‌های انجام‌شده بر روی توسعه مدل، ارائه مدلی برای کالای منسوخ‌شدنی با هدف حداکثرسازی سود بود که توسط جاگلاکر و همکاران (۱۹۹۳) صورت گرفت [۸]. به‌علاوه جاگلاکر و همکاران (۱۹۹۶) با درنظرگرفتن قیمت فروش، مدل موجودی کالای منسوخ‌شدنی را توسعه دادند [۹].

آرکلوس و همکاران (۲۰۰۲) مدلی برای کالاهای منسوخ‌شدنی تدریجی با تابع هدف حداکثرکردن سود ارائه کردند که در آن تقاضا تابعی از هزینه و زمان فروش است [۱]. سانگ و همکاران (۲۰۰۴) مدل موجودی دوره‌ای را برای کالاهای منسوخ‌شدنی ناگهانی با لحاظ‌کردن مفهوم برنامه‌ریزی پویا ارائه کردند [۲۱]. ونگ و همکاران (۲۰۱۱) با درنظرگرفتن مقدار تقاضا در طول دوره عمر محصول به‌عنوان تابعی از رشد جمعیت و همچنین ارائه تخفیف در قیمت در طول دوره نزول تقاضا مدل کنترل موجودی خود را ارائه و حل کردند [۲۵]. دلفت و همکاران

1. Obsolescence
2. High-Tech

(۱۹۹۶) با استفاده از تابع تخفیف نزولی مدل موجودی کالای منسوخ‌شدنی را ارائه کردند [۴]. پرسونا و همکاران (۲۰۰۵) سیاست کالای امانی (CS)[1] را با درنظرگرفتن کالای منسوخ‌شدنی ارائه دادند [۱۸]. یکی دیگر از فرضیه‌های اصلی در سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک این است که خریدار به محض دریافت کالا، اقدام به پرداخت هزینه خرید کالا می‌کند؛ درحالی‌که در واقعیت ممکن است فروشنده برای خریدار، مدت زمان معینی را به‌منظور پرداخت هزینه خرید در نظر بگیرد. این شیوه معامله که به «معامله اعتباری» معروف است به‌عنوان سیاست تشویقی برای جذب مشتریان بیشتر از سوی تأمین‌کنندگان به‌کار گرفته می‌شود؛ البته حالت دیگری وجود دارد که خریدار به فروشنده این اجازه را می‌دهد تا کالای خود را با تأخیر ارسال کند که این سیاست، تشویقی از سوی خریداران برای جذب فروشندگان بیشتر است.

اغلب پژوهش‌های صورت‌گرفته در مورد معامله اعتباری عموماً در زمینه اقلام فسادپذیر است که به‌صورت زیر شرح داده شده است:

اویانگ و همکاران (۲۰۰۶) سیاست بهینه‌ای را برای کالاهایی که پیوسته در حال فاسدشدن هستند با درنظرگرفتن تأخیر در پرداخت بررسی کردند [۱۵]. موسوی و همکاران (۲۰۱۴) یک زنجیره تأمین سه‌سطحی شامل خریدار، فروشنده و بانک را تحت شرایطی توسعه دادند که دوره اعتباری توسط فروشنده به خریدار اعلام می‌شود و وجوه نقد در بانکی که وابسته به فروشنده است، کنترل می‌شود [۱۳]. آن‌ها فرض کرده‌اند که بانک مقدار مشخصی تخفیف در نرخ وام را به فروشنده می‌دهد و این هماهنگی باعث کاهش هزینه‌ها می‌شود. جمال و همکاران (۱۹۹۷) سیاست سفارش‌دهی را تحت خرید اعتباری، وقتی کمبود مجاز است، توسعه دادند [۶]. چنگ و دای (۲۰۰۱) مدلی را که در آن کالا فسادپذیر و تأخیر در پرداخت و کمبود پسافت مجاز باشد، ارائه دادند [۲]. هونگ (۲۰۰۳) یک مدل دوسطحی از خرید اعتباری ارائه داد که در آن علاوه بر اینکه زمان پرداخت معوقه توسط فروشنده به خریدار اعلام می‌شود، خریدار نیز می‌تواند زمان پرداخت معوقه را به فروشنده اعلام کند [۵]. سونی و همکاران (۲۰۱۰) مروری بر روی مدل‌های موجودی با خرید اعتباری که شامل مواردی همچون شرایط سفارش اقتصادی، فسادپذیر، تقاضای احتمالی و ارزش فعلی پرداخت‌ها است، انجام دادند [۲۲].

در برخی از پژوهش‌ها نیز کاهش ارزش موجودی در طول زمان، بررسی شده است. برای مثال، خوجا و گویال (۲۰۰۶) با درنظرگرفتن مقدار پیوسته موجودی در طول زمان، مقدار سفارش بهینه را به‌دست آوردند [۱۰]. یو و همکاران (۲۰۱۱) مدل موجودی با کاهش پیوسته هزینه موجودی در یک زنجیره تأمین دوسطحی با درنظرگرفتن تولید را بررسی قرار کردند [۲۸]. جیلان و همکاران (۲۰۱۴) با استفاده از شبکه های بیزین، یک مدل یکپارچه غیر قطعی احتمالی برای

1. Consignment Stock

مدل سازی در زنجیره‌ی تأمین چندسطحی به منظور بهینه‌سازی میزان سفارش موجودی ارایه نمودند [۷]. ربیعه و همکاران (۲۰۱۱) با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار مدلی را جهت برنامه‌ریزی تامین قطعات شرکت ایران‌خودرو انجام داده‌اند [۲۰]. توسعه یافته است واندانا (۲۰۱۶) یک مدل سفارش‌دهی تحت خرید اعتباری با درنظرگرفتن کمبود در یک زنجیره تأمین دوسطحی ارائه کرد که در آن درصدی از هزینه‌ها باید توسط خرده‌فروش پیش‌پرداخت شود [۲۴]. زهراهن و همکاران (۲۰۱۶) یک مدل کنترل موجودی خرید اعتباری در سیاست کالای امانی[1] ارائه کردند [۲۹]. پورمحمد ضیاء و طالعی‌زاده (۲۰۱۶) یک مدل کنترل موجودی سه سطحی ترکیبی با درنظرگرفتن کمبود، پیش‌پرداخت و تأخیر در پرداخت ارائه کردند [۱۹]. در خصوص درنظرگرفتن تورم در مدل‌های فسادپذیر نیز می‌توان به موارد زیر به‌عنوان جدیدترین پژوهش‌های صورت‌گرفته اشاره کرد:

طالعی‌زاده و همکاران (۲۰۱۴) یک مدل کنترل موجودی برای کالاهای فسادپذیر همراه با کمبود پس‌افت و درنظرگرفتن فرآیندهای مالی ارائه دادند. آن‌ها اثرات ارزش زمانی پول و تورم را بر سیاست بهینه سفارش‌دهی در یک سیستم موجودی بررسی کردند و یک مدل سفارش بهینه اقتصادی برای مدیریت کالاهای فسادپذیر در یک افق زمانی محدود در حالتی که کمبود پس‌افت و تأخیر مجاز باشد ارائه کردند که تقاضا و نرخ زوال ثابت است [۲۳]. کومار و همکاران (۲۰۱۳) یک مدل موجودی برای اقلام فسادپذیر با تقاضای چندمتغیره با درنظرگرفتن دو انبار و اثر تورم ارائه کردند. تقاضا به زمان و سطح موجودی، وابستگی خطی دارد. در انبار شخصی نرخ زوال‌پذیری خطی متغیر با زمان است و در انبار اجاره‌ای نرخ زوال از توزیع وایبول پیروی می‌کند. در این پژوهش کمبود مجاز است و به‌صورت پس‌افت لحاظ شده است. هدف به‌دست‌آوردن مقدار بهینه سفارش‌داده‌شده و مقداری است که باید در انباره اجاره‌ای انتقال یابد تا حداکثر سود حاصل شود [۱۱].

پالانیول (۲۰۱۵) یک مدل موجودی دوانباری برای اقلام فسادپذیر غیرآنی با کمبود پس‌افت جزئی و تورم در یک افق زمانی محدود ارائه کرد. نرخ زوال‌پذیری در دو انبار شخصی و اجاره‌ای متفاوت است. کمبود جزئی نیز با یک نرخ وابسته به طول زمان انتظار در مدل ارائه شده است [۱۶]. مونیپان و همکاران (۲۰۱۵)، یک مدل سفارش بهینه اقتصادی برای اقلام فسادپذیر با درنظرگرفتن تورم و ارزش زمانی پول و نرخ زوال‌پذیری وابسته به زمان و تأخیر در پرداخت با افق زمانی محدود توسعه دادند. در پژوهش آن‌ها کمبود مجاز است و به‌صورت پس افت در نظر گرفته شده است و یک دوره اعتباری ثابت از طرف تأمین‌کننده برای خرده‌فروش لحاظ شده است [۱۴].

1. Consignment Stock

پاریک و همکاران (۲۰۱۵)، یک مدل کنترل موجودی فازی با تعیین مقدار بهینه سفارش‌دهی برای اقلام فسادپذیر با روش تورم تنزیل جریان نقدی وقتی اعتبارات تأمین‌کننده مرتبط با مقدار سفارش است، ارائه کردند [۱۷]. یادا و همکاران (۲۰۱۳)، یک سیاست بهینه‌سازی خرده‌فروشی با تورم در محیط فازی و پرداخت اعتباری ارائه کردند. در این مدل اثر نرخ تورم، نرخ فسادپذیری و تأخیر در پرداخت در مقدار بهینه اقتصادی بررسی شد [۲۶]. یانگ و همکاران (۲۰۱۳)، یک مدل موجودی با محصولات فسادپذیر با تقاضای وابسته به سطح موجودی و تورم و سیاست پرداخت اعتباری ارائه کردند. طول زمانی تأخیر مجاز در پرداختی که تأمین‌کننده به خرده‌فروش ارائه می‌دهد وابسته به مقدار سفارش خرده‌فروش است [۲۷]. مطلبی و همکاران (۲۰۱۷) ساختاری به منظور مکان‌یابی نقطه نفوذ مشتری و تعیین نقطه بهینه سفارش ارایه نمودند [۱۲].

جدول ۱. طبقه‌بندی پژوهش‌های صورت‌گرفته درباره کالاهای منسوخ‌شدنی و فسادپذیر و مقایسه آن‌ها با مدل پیشنهادی

شماره مقاله	فرضیات و سیاست‌های تصمیم‌گیری																				متغیرهای تصمیم مستقل و وابسته					
	نوع محصول		تقاضا/نرخ فساد (منسوخ‌شدن)		قیمت کالا			کمبود		نوع زنجیره تامین		تعداد انبار		تعداد محصول		تعداد سطوح زنجیره			نوع اجزاء زنجیره							
	فسادپذیر	منسوخ‌شدنی	غیر قطعی	قطعی	افزایش قیمت	تخفیف	تابع زمان، تقاضا، تعداد و ترکیب هر سه	پس افت	فروش از دست رفته	باز	بسته	یک	دو	تک محصولی	چند محصولی	یک	دو	چند	EOQ	EPQ	تأخیر در پرداخت	تورم	هزینه	قیمت گذاری	زمان بهینه سفارش	سود
۳		•		•				•		•		•		•		•			•				•			
۸		•		•								•		•		•			•							•
۹		•		•								•		•		•			•					•		
۱		•	•				•					•		•		•			•					•		
۲۱												•		•		•			•							
۲۵		•	•							•		•		•		•			•				•			
۴		•		•		•				•		•		•		•			•				•			
۱۸		•		•								•		•		•			•				•			
۱۵	•			•		•				•		•		•		•			•		•		•			
۱۳	•			•						•		•		•				•	•		•		•			
۶	•			•				•		•		•		•		•			•		•		•			
۲	•			•				•		•		•		•		•			•		•		•			
۵	•			•						•		•		•			•		•		•		•			
۲۲	•		•							•		•		•		•			•		•	•	•			
۱۰	•			•						•		•		•		•			•		•		•			
۲۸	•			•						•		•		•			•		•		•		•			
۲۴	•			•						•		•		•			•		•		•		•			
۲۹	•			•						•		•		•			•		•		•		•			
۱۹	•			•						•		•		•		•		•	•		•		•			
۲۳	•			•				•		•		•		•		•			•		•	•	•			
۱۱	•			•				•		•			•	•			•		•		•	•	•			
۱۶	•			•				•		•			•	•			•		•		•		•			
۱۴	•			•				•		•		•		•			•		•		•	•	•			
۱۷	•			•						•		•		•			•		•		•	•	•			
۲۶	•			•						•		•		•			•		•		•	•	•			
۲۷	•				•	•				•		•		•		•			•							•
این تحقیق		•	•				•			•		•		•		•			•		•	•	•	•	•	

با توجه به جدول ۱، بررسی‌های انجام‌شده نشان می‌دهد برخلاف کالاهای فسادپذیر، پژوهش‌های زیادی در مورد کالای منسوخ‌شدنی صورت نگرفته است؛ به همین دلیل، مطالعه بر روی موضوع‌هایی که در زمینه کالاهای فسادپذیر مطرح بوده و اجرای آن‌ها در زمینه کالاهای منسوخ‌شدنی، دارای جذابیت بسیاری است. یکی از مهم‌ترین و در عین حال کاربردی‌ترین موضوع‌ها، موضوع درنظرگرفتن تأخیر در پرداخت و تورم است.

۳. روش‌شناسی پژوهش

چارچوب اصلی مسئله پیش رو به این ترتیب است که فروشنده محصول خود را به خریدار می‌فروشد و این اجازه را به خریدار می‌دهد تا هزینه کالای سفارش‌داده‌شده را با تأخیر پرداخت کند؛ از طرف دیگر کالای ارائه‌شده با تابع توزیع نمایی منسوخ می‌شود و نوع منسوخ‌شدن کالا ناگهانی است و تعداد کالایی که در نقطه منسوخ‌شدن باقی می‌مانند باعث ایجاد هزینه می‌شوند. مدلی که در این بخش معرفی می‌شود، دارای مفروضات زیر است:

ـ تقاضا ثابت است؛

ـ فقط برای یک محصول مدل‌سازی انجام می‌گیرد؛

ـ کمبود مجاز نیست؛

ـ پرداخت بعد از دریافت سفارش انجام می‌شود؛

ـ مدل‌سازی تحت شرایط تورم است؛

ـ منسوخ‌شدن به‌صورت ناگهانی است؛

ـ تابع توزیع احتمالی طول عمر منسوخ‌شدن کالا، نمایی در نظر گرفته شده است؛

ـ افق برنامه ریزی نامحدود است.

مدل‌سازی. در این مدل چون مقدار بهینه سفارش و درنتیجه طول بهینه سفارشدهی متغیر تصادفی مستقل هستند، پس حداقل‌کردن هزینه‌های یک دوره معادل حداقل‌کردن هزینه‌های کل دوره است؛ درنتیجه مسئله برای یک دوره مدل‌سازی شده و برای طول عمر انتظاری محصول تعمیم داده می‌شود. پارامترهای مورداستفاده در این پژوهش به‌صورت زیر هستند:

پارامترها

t: زمانی که کالا منسوخ می‌شود (سال)

L: زمان موردانتظار عمر محصول (سال)

D: مقدار تقاضای یک سال

A: هزینه سفارش‌دهی ($)

H: نرخ هزینه نگهداری در یک دوره

C_p: هزینه هر واحد کالا ($)

C_s: هزینه هر واحد کالای منسوخ‌شده ($)

M: زمان پرداخت بعد از دریافت سفارش (سال)

I_e: نرخ بهره دریافتی در یک دوره

I_p: نرخ بهره پرداختی در یک دوره

IE: متوسط سود دریافتنی

IC: متوسط سود پرداختنی

P_s: احتمال اینکه در طول دوره پیش رو منسوخ‌شدن کالا رخ ندهد.

متغیرهای تصمیم

Q: مقدار سفارش بهینه

T: دوره بهینه سفارش‌دهی کالا (سال)

R: نرخ تنزیل تورم

C_c: هزینه‌های خرید، سفارش‌دهی، نگهداری و منسوخ‌شدنی در یک دوره ($)

C_L: کل هزینه موجودی (هزینه‌های خرید، سفارش‌دهی، نگهداری و منسوخ‌شدنی در طول دوره موردانتظار منسوخ‌شدن کالا) تنزیل‌شده بر اساس نرخ تورم، شامل هزینه‌های سفارش‌دهی، نگهداری، منسوخ‌شدنی، سود پرداختنی و سود دریافتنی ($)

C_L (M): کل هزینه موجودی زمانی که T=M است ($)

«منسوخ‌شدن به‌صورت ناگهانی» و «تابع توزیع احتمالی عمر منسوخ‌شدن کالا» دو پارامتر مجزا هستند با این تفسیر که:

ـ منسوخ‌شدن به‌صورت ناگهانی یعنی اینکه با منسوخ‌شدن کالا، به یکباره تقاضای آن صفر می‌شود.

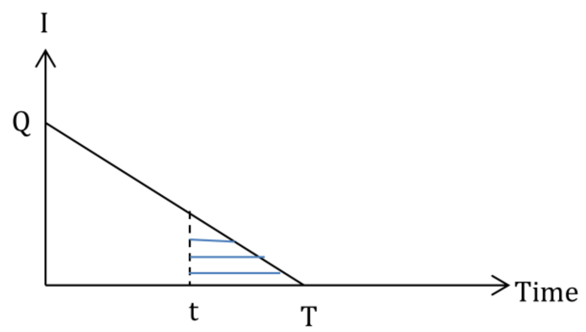
ـ تابع توزیع عمر منسوخ‌شدنی با تابع نمایی با پارامتر L یعنی اینکه به‌صورت میانگین L سال طول می‌کشد تا کالا منسوخ شود و اگر زمان منسوخ‌شدن کالا فرا برسد به‌صورت ناگهانی منسوخ می‌شود.

مانند سایر مدل‌های موجودی، مدل‌سازی ارائه‌شده از هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی تشکیل شده است. هزینه‌های منسوخ‌شدنی و هزینه‌های پرداختی و سود دریافتی بر اساس تأخیر زمانی پرداخت نیز در مدل لحاظ می‌شود؛ بر این اساس مدل‌سازی ارائه‌شده به‌شرح زیر است:

هزینه خرید. در ابتدای هر دوره به اندازه مقدار سفارش اقتصادی (Q)کالا خریداری می‌شود که هزینه هر واحد خرید برابر با C_p است؛ بنابراین کل هزینه خرید در هر دوره برابر است با:

$$CP=C_p*Q$$

هزینه کالاهای منسوخ‌شده. هزینه‌های منسوخ‌شدنی عبارت‌اند از: تعداد کالاهایی که در زمان t با درنظرگرفتن احتمال توزیع نمایی با پارامتر $(\frac{1}{L})$ منسوخ می‌شوند. با توجه به پژوهش‌های کوبرت و همکاران (۱۹۹۶) [۳] و جاگلاکر و همکاران(۱۹۹۳ و ۱۹۹۶) [۸]، [۹] و همچنین با توجه به اینکه احتمال منسوخ‌شدن در دوره‌های اول کمتر است و به مرور زمان افزایش می‌یابد تابع احتمال منسوخ‌شدن به‌صورت نمایی با پارامتر L در نظر گرفته شده است. این احتمال در قالب رابطه $\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-t/L}\right]$ در کلیه روابط مربوط به محاسبه هزینه‌های مدل لحاظ شده است؛ اما سوای این احتمال، برای درنظرگرفتن میزان کالای منسوخ‌شدنی، اگر کل کالای سفارش‌داده‌شده در طول یک دوره برابر با Q باشد که تا زمان t به اندازه tD آن‌ها مصرف شده باشد، تعداد Q- tD کالا به هزینه هر واحد C_s منسوخ می‌شود و درنتیجه کل هزینه‌های منسوخ‌شدن کالا عبارت‌اند از:



شکل ۱. وضعیت موجودی منسوخ‌شده

$$CS=\int_0^{\frac{Q}{D}}[Q-(tD)](C_s)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-t/L}\right]dt=(D\,L[-1+e^{-\frac{Q}{DL}}]+Q)C_s \quad (۱)$$

هزینه‌های نگهداری

ـ میزان موجودی ابتدای دوره برابر با Q است؛ بنابراین اگر منسوخ‌شدن در زمان t [0<t<T]، با درنظرگرفتن احتمال توزیع نمایی با پارامتر $(\frac{1}{L})$، رخ دهد، میزان موجودی در زمان t برابر است با

$Q - tD$ و میانگین موجود در طول یک دوره عبارت است از: $Q - \left(\frac{tD}{2}\right)$. هزینه نگهداری هر قلم کالا در طول سال برابر با حاصل‌ضرب هزینه خرید هر کالا در نرخ هزینه نگهداری (C_pH) در نظر گرفته شده است؛ بر این اساس هزینه نگهداری کالا تا زمان t برابر است C_pHt و هزینه نگهداری در این حالت عبارت است از:

$$C_{H1}=\int_0^{\frac{Q}{D}}\left[Q-\left(\frac{tD}{2}\right)\right]\left(C_pHt\right)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-t/L}\right]dt=$$

$$\frac{HC_p\left(2L(-D\,L+Q)+\frac{e^{-\frac{Q}{DL}}(2D^2\,L^2-Q^2)}{D}\right)}{2} \qquad (۲)$$

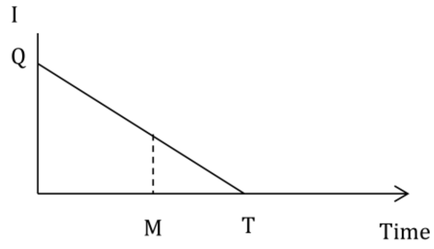
ـ در صورتی که منسوخ‌شدن در زمان t [t>T]، با درنظرگرفتن احتمال توزیع نمایی با پارامتر $(\frac{1}{L})$ رخ دهد، میانگین موجودی در طول دوره برابر با $Q/_2$ است؛ بنابراین هزینه‌های نگهداری عبارت‌اند از:

$$C_{H2}=\int_{\frac{Q}{D}}^{\infty}\left[\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{D}\right)\right]\left(C_pH\right)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-t/L}\right]dt=\frac{H\,C_p\,Q^2\,e^{-\frac{Q}{DL}}}{2D} \qquad (۳)$$

هزینه‌ها و درآمدهای تأخیر در پرداخت. در صورتی که تأخیر در پرداخت نیز لحاظ شود می‌توان با توجه به شرایط زمان پرداخت و دوره بهینه سفارش‌دهی که یکی از حالات $(T < M)$ و یا $(T > M)$ است عبارات زیر را به هزینه‌های یک دوره مربوط به کالای منسوخ‌شدنی اضافه کرد. تفاوت مدل‌های تأخیر در پرداخت ایجادشده در این پژوهش با مدل‌های تأخیر در پرداخت کالاهای فسادپذیر در میزان موجودی است که به آن بهره دریافتی تعلق می‌گیرد. با توجه به اینکه در کالاهای منسوخ‌شدنی بعد از منسوخ‌شدن، تقاضا صفر می‌شود و کالا به فروش نمی‌رسد، درآمدی هم برای موجودی که با شرایط تأخیر در پرداخت دریافت شده و به فروش نرسیده است، در نظر گرفته نمی‌شود؛ بنابراین:

حالت اول $T \geq M$

با فرض اینکه نقطه منسوخ‌شدن کالا در فاصله [0,M] باشد، متوسط موجودی که به فروش می‌رسد $Q - \left(\frac{tD}{2}\right)$ است؛ بنابراین:



شکل ۲. وضعیت موجودی در حالت $T \geq M$

متوسط سود دریافتنی. برای محاسبه متوسط سود دریافتنی، خرده‌فروش در یک دوره سفارش می‌دهد و در لحظه M هزینه را پرداخت می‌کند؛ درنتیجه این امر باعث می‌شود که خریدار در بازه [0,M] سودی را بابت کالایی که مصرف کرده و بهای آن را پرداخت نکرده است، دریافت کند. با توجه به احتمال منسوخ‌شدن کالا، تا زمان t سود محاسبه می‌شود و با توجه به اینکه احتمال منسوخ‌نشدن کالا تا زمان t برابر است با:

$$\int_t^{\infty} \frac{1}{L} e^{-t}/_{L} = e^{-\frac{t}{L}} \qquad (۴)$$

سود دریافتنی برابر است با حاصل‌ضرب موجودی مصرف‌شده تا زمان منسوخ‌شدن احتمالی کالا (Dt)؛ بنابراین با درنظرگرفتن بهره دریافتی و قیمت خرید کالا، سود دریافتی از کالایی که مصرف شده و بهای آن پرداخت نشده برابر است با:

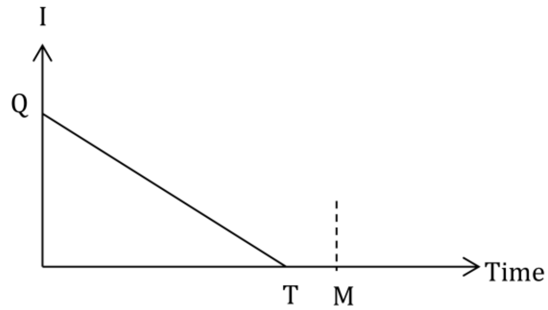
$$IE_1 = C_p I_e \int_0^M t\, D \left(\frac{1}{L}\right) e^{-\frac{t}{L}} dt = C_p\ I_e\ \ D[L - e^{-\frac{M}{L}}(L+M)] \qquad (۵)$$

متوسط سود پرداختنی. برای محاسبه متوسط سود پرداختنی، خرده‌فروش در یک دوره سفارش می‌دهد و در لحظه M هزینه را پرداخت می‌کند؛ درنتیجه این امر باعث می‌شود که خریدار در بازه [M,T] سودی را بابت موجودی که خریده و هنوز مصرف نکرده است، پرداخت کند؛ بنابراین از زمان M تا زمان T مقدار موجودی که در دست بوده و بهای آن پرداخت شده ولی مصرف نشده است، برای خرده‌فروش هزینه مالی ایجاد می‌کند که این مقدار موجودی در زمان t برابر است با Q-tD؛ بنابراین هزینه مالی تحمیل‌شده به خرده‌فروش بابت کالایی که بهای آن را پرداخت کرده ولی استفاده نکرده است، برابر است با:

$$IC_1 = C_p I_p \int_M^{\frac{Q}{D}} I(t)dt = C_p I_p \int_M^{\frac{Q}{D}} (Q - D\ t)dt = C_p\ I_p \left[\frac{Q^2}{D} - \frac{D(\frac{Q}{D})^2}{2} - (Q\ M - \frac{D\ M^2}{2})\right] \qquad (۶)$$

حالت دوم $T \leq M$

با فرض اینکه نقطه منسوخ‌شدن کالا در فاصله $[T, \infty]$ باشد در این حالت خرده‌فروش فقط بهره درآمد از فروش کالا را کسب می‌کند؛ درحالی‌که هیچ بهره‌ای به تأمین‌کننده پرداخت نمی‌کند؛ زیرا زمان پرداخت کالای دریافت‌شده بعد از دوره مصرف است، بنابراین هیچ کالایی وجود ندارد که بهای آن را پرداخت نموده باشد و مصرف نکرده باشد؛ ازاین‌رو سود دریافتنی تا زمان T برابر با مقدار کالایی است که دریافت کرده است و در بازه [0,T] دچار منسوخ‌شدن نشده باشد؛ بنابراین سود دریافتی حاصل از کالای دریافت‌شده که بهای آن پرداخت نشده است عبارت است از:



شکل ۳. وضعیت موجودی در حالت $T \leq M$

$$IE_1 = C_p I_e \int_0^{\frac{Q}{D}} tD \left[\left(\frac{1}{L}\right) e^{-\frac{t}{L}}\right] dt = C_p I_e\, D\, \left[L - e^{-\frac{Q}{DL}}\left(L+\frac{Q}{D}\right)\right] \quad (۷)$$

بهره دریافتنی در طول دوره [M,T]، یعنی بین طول دوره و دوره اعتباری، عبارت است از:

$$IE_2 = C_p\, I_e\, Q \int_T^M \left(t-\frac{Q}{D}\right)\left[\left(\frac{1}{L}\right) e^{-\frac{t}{L}}\right] dt = C_p\, I_e\, Q \left[\left(-e^{-\frac{M}{L}}\left(L+M-\frac{Q}{D}\right) + L\, e^{-\frac{Q}{DL}}\right)\right] \quad (۸)$$

کل هزینه‌های یک دوره. کل هزینه‌های موجودی در صورتی‌که $T \geq M$ باشد در طول یک دوره عبارت است از:

$$C_{c1} = A + Q * C_p + \int_0^{\frac{Q}{D}} [Q-(t\,D)](C_s)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt + \int_0^{\frac{Q}{D}}\left[Q-\left(\frac{t\,D}{2}\right)\right](C_p\,H\,t)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt + \int_{Q/D}^{\infty}\left[\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{D}\right)\right](C_p H)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt + C_p\, I_e \int_M^{\frac{Q}{D}}(Q-D\,t)dt - C_p I_e \int_0^M \left[(t\,D)\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt \quad (۹)$$

با جایگذاری روابط ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ هزینه‌های کل به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$C_{c1} = A + Q * C_p + (H\,L\,C_p + C_s)*(Q - D\,L(1-e^{-\frac{Q}{D*L}})) + C_p\,I_p(\frac{DM^2}{2} - M\,Q + \frac{Q^2}{2D}) - C_p\,I_e\,D(L - e^{-\frac{M}{L}}(L+M)) \quad (۱۰)$$

همچنین هزینه‌های موجودی در صورتی که $T \leq M$ باشد در طول یک دوره عبارت است از:

$$C_{c2} = A + Q * C_p + \int_0^{\frac{Q}{D}}[Q-(t\,D)](C_s)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt + \int_0^{\frac{Q}{D}}[Q - ({tD}/{2})](C_p\,H\,t)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt + \int_{Q/D}^{\infty}\left[(\frac{Q}{2})\left(\frac{Q}{D}\right)\right](C_p\,H)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt - C_p\,I_e\int_0^{\frac{Q}{D}}[(t\;D)]\left[\left(\frac{1}{L}\right)\,e^{-\frac{t}{L}}\right]dt - C_p\,I_e\,Q\int_T^M(t-\frac{Q}{D})\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt \quad (۱۱)$$

بنابراین C_c، کل هزینه‌های یک دوره با جایگذاری روابط ۱، ۲، ۳، ۷ و ۸ عبارت است از:

$$C_{c2}=A+ Q * C_p+(H\,L\,C_p + C_s)(Q - D\,L\,(1-e^{-\frac{Q}{D*L}})) - C_p\,I_e\,D\left[L - e^{-\frac{Q}{DL}}\left(L+\frac{Q}{D}\right)\right] - C_p\,I_e\;Q\left[\left(-e^{-\frac{M}{L}}\left(L+M-\frac{Q}{D}\right) + L\,e^{-\frac{Q}{DL}}\right)\right] \quad (۱۲)$$

کل هزینه‌های تنزیل‌شده موجودی در طول دوره موردانتظار محصول. روابط به‌دستآمده در بخش قبل تنها برای یک دوره محاسبه شده بود. حال این روابط برای کل دوره‌ها تعمیم داده می‌شود که قضیه ۱، در این زمینه راهگشا است.

قضیه ۱. متوسط هزینه‌های موجودی کل دوره از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$C_L = \frac{Cc}{(1-P_s e^{-R\frac{Q}{D}})}$$

اثبات: ازآنجاکه تابع توزیع عمر محصول نمایی فرض شده است و توزیع نمایی بی‌حافظه است، هزینه‌های موجودی در ابتدای هر دوره، در صورتی که منسوخ‌شدن در دوره‌های قبل رخ نداده باشد، برابر با حاصل‌ضرب هزینه‌های موجودی یک دوره در احتمال منسوخ‌نشدن کالا تا آن دوره خواهد بود؛ بنابراین با توجه به احتمالی‌بودن هزینه های منسوخ‌شدنی و همچنین با وجود تورم و با توجه به اینکه هزینه‌ها در دوره i با نرخ تنزیل $e^{-R\frac{Q}{D}(i-1)}$ به دوره اول انتقال می‌یابند، کل هزینه‌های موجودی در طول دوره عمر موردانتظار محصول عبارت است از:

$$C_L=C_c+ C_c\,P_s e^{-R\frac{Q}{D}} + C_c\,(P_s e^{-R\frac{Q}{D}})^2 + \ldots \Rightarrow C_L= \frac{C_c}{(1-P_s e^{-R\frac{Q}{D}})} \quad (۱۳)$$

اما از طرفی

$$P_s=\int_{\frac{Q}{D}}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-\frac{t}{L}}\right]dt=e^{-\frac{Q}{DL}} \tag{۱۴}$$

درنتیجه با توجه به عبارات ۱۳ و ۱۴ خواهیم داشت:

$$C_L=\frac{Cc}{(1-e^{-\frac{Q}{DL}}*e^{-R\frac{Q}{D}})} \tag{۱۵}$$

بنابراین متوسط هزینه‌های موجودی در طول دوره عمر مورد انتظار محصول (CL) برای دو حالت $M\leq T$ و $T\leq M$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

حالت اول $M\leq T$. در این حالت منسوخ‌شدن کالا در فاصله $[0,M]$ رخ می‌دهد؛ بنابراین با توجه به هزینه‌های موجودی در یک دوره و با توجه به قضیه ۱، داریم:

$$C_L=\frac{Cc}{(1-P_s e^{-R\frac{Q}{D}})} \Rightarrow$$

$$C_{L1}=\frac{Q*C_p+A+(HLC_p+C_s)*\left(Q-DL\left(1-e^{-\frac{Q}{D*L}}\right)-C_p IeLD(L-e^{-\frac{M}{L}}(L+M))\right)+C_p Ip\left(\frac{DM^2}{2}-MQ+\frac{Q^2}{2D}\right)}{(1-e^{-\frac{Q}{DL}}*e^{-R\frac{Q}{D}})} \tag{۱۶}$$

حالت دوم $T\leq M$. فرض می‌شود که نقطه منسوخ‌شدن کالا در فاصله $[T,\infty]$ باشد؛ بنابراین با توجه به هزینه‌های موجودی در یک دوره و با توجه به قضیه ۱ داریم:

$$C_L=\frac{Cc}{(1-P_s e^{-R\frac{Q}{D}})}$$

$$C_{L2}=\frac{Q*C_p+A+(H\,L\,C_p+C_s)*\left(Q-D\,L\left(1-e^{-\frac{Q}{D*L}}\right)\right)-C_p I_e D\left(L-e^{-\frac{Q}{DL}}\left(L+\frac{Q}{D}\right)\right)-C_p I_e Q\left[\left(-e^{-\frac{M}{L}}\left(L+M-\frac{Q}{D}\right)+L\,e^{-\frac{Q}{DL}}\right)\right]}{(1-e^{-\frac{Q}{DL}}*e^{-R\frac{Q}{D}})} \tag{۱۷}$$

هنگامی که مقدار $T=M$ شود هزینه‌ها در هر دو حالت $T>M$ و $T<M$ با هم برابر می‌شود؛ بنابراین زمانی‌که $T=M$ باشد فقط سود پرداختنی داریم که در فاصله $[0,M]$ به‌دست می‌آید با توجه به اینکه $T=M$ داریم:

$$IE=CI_e\int_0^{\frac{Q}{D}}tD\left[e^{-\frac{t}{L}}\right]dt=-CDI_eL(L-e^{-\frac{Q}{DL}}(L+\frac{Q}{D})) \tag{۱۸}$$

بنابراین C_c، کل هزینه‌های یک دوره در حالت T=M با جایگذاری روابط ۱، ۲، ۳ و ۱۸ عبارت است از:

$$C_c = Q * C_p + A + (HLC_p + C_s) * (Q - DL(1 - e^{-\frac{Q}{D*L}} - C_p\, I_e\, L\, D(L - e^{-\frac{Q}{DL}}[L + \frac{Q}{D}]) \qquad (۱۹)$$

درنتیجه هزینه کل دوره‌ها از رابطه ۲۰، به‌دست می‌آید.

$$C_L = \frac{Q * C_p + A + (HLC_p + C_s) * (Q - DL(1 - e^{-\frac{Q}{D*L}} - C_p\, I_e\, L\, D(L - e^{-\frac{Q}{DL}}[L + \frac{Q}{D}])}{(1 - e^{-\frac{Q}{DL}} * e^{-R\frac{Q}{D}})} \qquad (۲۰)$$

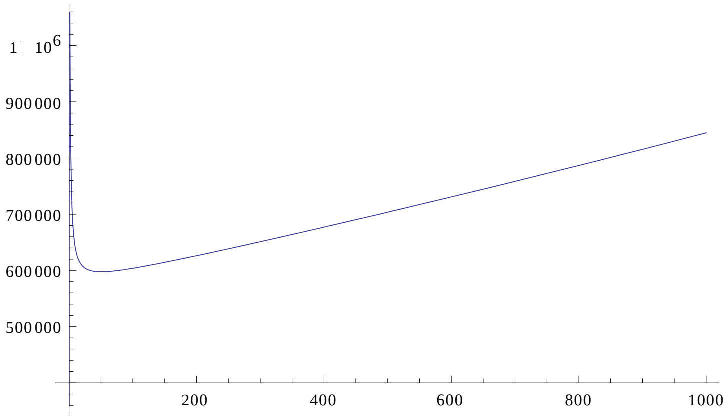
٤. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

قبل از حل مدل به‌دلیل اینکه هدف حداقل‌کردن هزینه‌ها است باید برای هر دو حالت T>M و T<M محدب‌پذیری تابع بررسی شود؛ بنابراین باید اثبات کرد که:

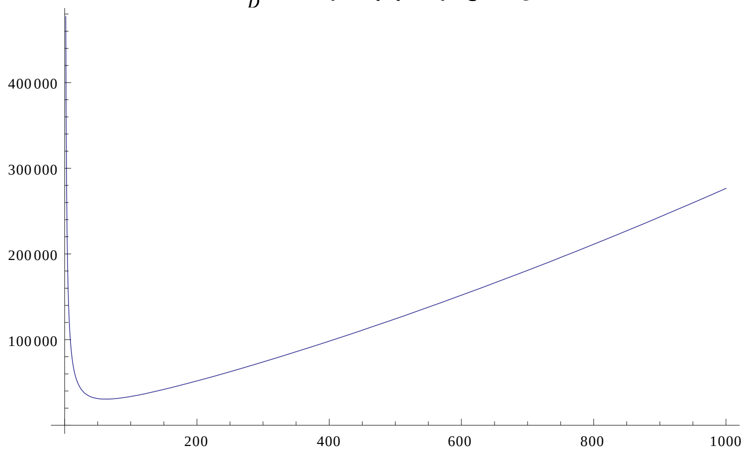
$$\frac{\partial^2 CL}{\partial^2 Q} > 0$$

برای حالت اول (M<T)، مشتق تابع و شرایط محدب‌بودن تابع در پیوست الف نشان داده شده است. با توجه به پیچیدگی رابطه به‌دست‌آمده از مشتق دوم، به‌منظور نشان‌دادن مثبت‌بودن مشتق دوم از روش ترسیمی استفاده شده است. در شکل ۴، نشان داده می‌شود که تابع هدف حالت اول برای Q>0 محدب است.

برای حالت دوم (M>T) نیز با توجه به پیچیدگی رابطه به‌دست‌آمده از مشتق دوم، به‌منظور نشان‌دادن مثبت‌بودن مشتق دوم، از روش ترسیمی استفاده شده است. در شکل ۵، نشان داده می‌شود که تابع هدف حالت دوم برای Q>0 محدب است؛ البته مشتق تابع و شرایط محدب‌بودن تابع در پیوست ب نشان داده شده است.



شکل ۴. تابع هزینه موجودی برای حالت $M < \frac{Q}{D}$



شکل ۵. تابع هزینه موجودی برای حالت $M > \frac{Q}{D}$

برای حل مدل، مقدار بهینه T به‌دست‌آمده از حالت اول، T_1 و مقدار بهینه T به‌دست‌آمده از حالت دوم، T_2 نامیده می‌شود و گام‌های زیر صورت می‌گیرد:

1. If ($T_1<M$ & $T_2<M$) then compare[C_L (T_1) & C_L (T_2)] else Go to 4:

2. If ($T_1<M$ & $T_2 \nless M$) then compare[C_L (T_1) &C_L (M)] else Go to 4:
3. If ($T_1 \nless M$ & $T_2<M$) then compare[C_L (T_2) &C_L (M)] else Go to 4:

4. Select T^* & Determine Q^*

5. If ($T_1 \nless M$ و $T_2 \nless M$) then $T^*=M$ ⇨ Q=D*M

نتایج مدل و تحلیل حساسیت. در این پژوهش، «یکی از نمایندگی‌های فروش گوشی همراه هواوی» به‌عنوان مورد مطالعاتی انتخاب شده است. نمایندگی مزبور از سال ۱۳۹۰ به‌صورت خرده‌فروشی در حوزه فروش محصولات «هواوی» فعالیت دارد. برای حل مدل بر اساس داده‌های خرده‌فروش، دو محصول با توجه به محدوده قیمتی ۲۰$ تا ۱۰۰۰$ این گوشی همراه، انتخاب و نتایج بر اساس آن بررسی و تحلیل شد. با توجه به اینکه نمایندگی، زیرمجموعه شرکت خارجی است و قیمت‌های خرید با نرخ ارزی صورت می‌پذیرد، واحد هزینه‌های درنظرگرفته‌شده به‌صورت دلار لحاظ شده است. بر این اساس دو گوشی Huawei Honor 6X BLN-L21 با قیمت خرید ۱۰۰$ و گوشی Huawei Nova 2 Plus با قیمت خرید ۲۰۰$ به‌عنوان نمونه بررسی شدند. با توجه به اطلاعات دریافتی درخصوص هزینه‌های لازم برای هماهنگی و ارسال محصولات و همچنین هزینه‌های ترخیص و گمرکی هر سفارش، هزینه‌های سفارش‌دهی به‌صورت میانگین به میزان۲۰۰$ در نظر گرفته شد؛ همچنین با توجه به تعدیل سود بانکی و کاهش نرخ بهره بانکی و نحوه معامله خرده‌فروش موردنظر و شرایط رکود موجود در بازار، نرخ بهره دریافتی ۰/۱۳ و نرخ بهره پرداختی ۰/۱۵ لحاظ شده و نرخ هزینه‌های نگهداری نیز با توجه به قیمت اجاره فضا و قیمت نهایی محصول، ۰/۱۲ در نظر گرفته شده است:

$$H=0.12,\ Ip=0.15,\ Ie=0.13$$

به‌منظور تحلیل حساسیت پارامترهای زمان پرداخت از مقدار M=0 روز (خرید نقدی) تا M=30 تغییر می‌کند و اثر آن بر روی کل هزینه‌های موجودی (TC و TC(M)) تحلیل می‌شود؛ همچنین تأثیر متوسط زمان منسوخ‌شدن کالا با تغییر L=2 سال تا L=4 سال تحلیل می‌شود و از طرفی با تغییر هزینه‌های هر واحد کالا از ۲۰ واحد تا ۲۰۰ واحد، تأثیر تغییر هر واحد کالا بر روی هزینه‌های موجودی موردبررسی قرار می‌گیرد.

جدول ۲. هزینه‌های موجودی با تغییر L، M و C

M	L	T<M				T>M			
		Cs=Cp=C=۲۰ Rs		Cs=Cp=C=۲۰۰ Rs		Cs=Cp=C=۲۰ Rs		Cs=Cp=C=۲۰۰ Rs	
		۲	٤	۲	٤	۲	٤	۲	٤
0	Q	۱۳۰/۴۱	۱۶۹/۶۶	۴۱/۴۹	۵۳/۸۵	۱۱۸/۸۷	۱۴۹/۵۳	۳۸/۰۱	۴۷/۷۳
	C_L	۳۸۵۲۳/۴۱	۶۳۹۶۱/۹۱	۳۷۹۴۷۷/۴۵	۵۹۲۷۳۵/۸	۳۸۹۹۷/۲۴	۶۴۸۳۳ /۷۷	۳۵۰۹۲۷/۵۲	۵۹۵۴۱۷/۷۸
	C_L (M)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
۱۵ روز	Q	۱۳۰/۱۱	۱۶۹/۳۳	۴۱/۴	۵۳/۷۴	۱۱۹/۴۲	۱۵۰/۴۱	۳۹/۳۴	۴۹/۹۸
	C_L	۳۸۵۳۳/۲۵	۶۳۹۷۳/۲۹	۳۴۹۴۹۶/۱۴	۵۹۲۷۶۱/۰۴	۳۸۸۰۹/۹۲	۶۴۵۱۸/۶۷	۳۴۹۵۰۳/۱۶	۵۹۳۰۷۰/۶۷
	C_L (M)	۴۲۴۹۷/۶۵	۷۲۲۰۵/۵۳	۳۴۹۰۷۲/۹۵	۵۹۲۹۸۱/۷۳	۴۲۴۹۷/۶۵	۷۲۲۰۵/۵۳	۳۴۹۰۷۲/۹۵	۵۹۲۹۸۱/۷۳
۳۰ روز	Q	۱۲۹/۸۱	۱۶۹/۰۱	۴۱/۴۱	۵۳/۶۴	۱۲۰/۷۹	۱۵۲/۶۵	۴۳/۰۴	۵۶/۱۱
	C_L	۳۸۵۳۹/۳۸	۶۳۹۸۱/۵۲	۳۴۹۴۸۰/۳۲	۵۹۲۷۵۶/۴۱	۳۸۶۶۲/۶۸	۶۴۲۷۶/۲۹	۳۴۹۱۸۸/۸۵	۵۹۲۶۸۹/۲۹
	C_L (M)	۳۹۰۶۹/۸۳	۶۵۷۴۴/۵	۳۵۲۲۹۱/۰۵	۵۹۲۲۵۵/۰۹	۳۹۰۶۹/۸۳	۶۵۷۴۴/۵	۳۵۲۲۹۱/۰۵	۵۹۲۲۵۵/۰۹

همانطور که در جدول ۲، مشاهده می‌شود، تنها برای شرایط M=0.04, 0.08، L=2 و C=200، هزینه بهینه در حالت T=M و برای M=0.08، L=4 و C=200 حالت بهینه در T<M اتفاق می‌افتد و برای مابقی شرایط، هزینه بهینه در حالت T>M رخ می‌دهد. با توجه به جدول ۲، با کاهش مقدار L، هزینه‌های موجودی کاهش می‌یابد که طبیعی است؛ زیرا با کاهش L، احتمال اینکه در تعداد سال‌های کمتری موجودی وجود داشته باشد، بیشتر می‌شود و درنتیجه هزینه‌های موجودی نیز کاهش می‌یابد؛ همچنین در حالت اول (M<T) با افزایش مقدار C از ۲۰ تا ۲۰۰، تأثیر کاهش هزینه‌ها با کاهش L بیشتر می‌شود و شیب کاهش هزینه‌ها با کاهش L در حالت C=200 بسیار بیشتر از C=20 است. با افزایش مقدار M تأثیر کاهش هزینه‌ها نسبت به کاهش مقدار L کمتر می‌شود؛ درواقع در M=30 شیب کاهش هزینه‌ها نسبت به کاهش L کمتر از حالت M=0 است.

در شرایط فروش نقدی (M=0)، تأثیر افزایش C بر هزینه‌های خیلی کمتر از حالتی است که M>0 است و هر چه مقدار M افزایش می‌یابد تأثیر افزایش قیمت هر کالا بر افزایش هزینه‌ها بیشتر می‌شود؛ درواقع شیب افزایش هزینه نسبت به تغییر قیمت کالا (از ۲۰ تا ۲۰۰) در حالت M=30 روز بیشتر از M=0 روز است. در حالت دوم (M>T) نیز با کاهش L مقدار هزینه‌ها کاهش می‌یابد و با افزایش مقدار C شیب کاهش هزینه‌ها نسبت به تغییر مقدار L (از ۴ تا ۲) بیشتر می شود؛ اما در مقابل، افزایش مقدار M تأثیر چندانی بر کاهش یا افزایش شیب نمودار با افزایش مقدار C ندارد.

در هر دو حالت (M>T و M<T) مقدار بهینه سفارش‌دهی(Q) با کاهش مقدار L کاهش می‌یابد. افزایش مقدار C هرچند باعث افزایش مقدار بهینه سفارش دهی می‌شود، اما أثیر چندانی بر شیب کاهش مقدار بهینه سفارش‌دهی نسبت به کاهش L نمی‌گذارد؛ همچنین افزایش مقدار M تأثیری بر شیب کاهش مقدار بهینه سفارش‌دهی با کاهش مقدار L نمی‌گذارد.

با افزایش مقدار M، هزینه‌های موجودی کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش مقدار M احتمال استفاده از ارزش زمانی پول بیشتر می‌شود و بدیهی است با وجود ارزش زمانی پول، خریدار هر چه دیرتر پول فروشنده را بدهد سود بیشتری به‌دست خواهد آورد. در حالت اول (M<T) با افزایش مقدار C از ۲۰ تا ۲۰۰، تأثیر کاهش هزینه‌ها با افزایش M به‌مراتب بیشتر می‌شود؛ درواقع شیب کاهش هزینه‌ها با افزایش M در حالت C=200 بسیار بیشتر از C=20 است؛ اما در حالت دوم (T<M) افزایش مقدار M تأثیر بسیار ناچیزی بر کاهش هزینه‌های دارد و شیب تغییر هزینه‌ها نسبت به کاهش مقدار M تقریباً برابر با صفر است.

افزایش M در هر دو حالت (M>T و M<T) تأثیر بسیار ناچیزی بر افزایش مقدار سفارشدهی می‌گذارد و شیب تغییر مقدار بهینه سفارش‌دهی نسبت به افزایش M برای تمامی حالات C تقریباً برابر با صفر است.

با افزایش مقدار C نیز هزینه‌های موجودی افزایش می‌یابد؛ زیرا با افزایش مقدار C، تأثیر افزایش هزینه‌های نگهداری به‌مراتب بیشتر از حاصل‌ضرب I_e در مقدار موجودی مشمول بهره زمانی پول در قیمت هر واحد کالا است.

تغییر هزینه‌ها و مقدار سفارش‌دهی با تغییر مقدارهای L، M، C در جدول ۳، نشان داده شده است:

جدول ۳. تحلیل حساسیت پارامترهای M، L و C

	M > T	M < T
L	L$\downarrow \Rightarrow$CL$\downarrow$, $C\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta L}\right\rvert \uparrow$, M$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta L}\right\rvert$ fixed L$\downarrow \Rightarrow Q\downarrow$, $C\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right\rvert$ fixed, M$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right\rvert$ fixed	L$\downarrow \Rightarrow$CL$\downarrow$, C$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta L}\right\rvert \uparrow$, M$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta L}\right\rvert \downarrow$ L$\downarrow \Rightarrow$Q$\downarrow$, C$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right\rvert$ fixed, M$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta L}\right\rvert$ fixed
C	C$\uparrow \Rightarrow TC\uparrow$, $M\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta \mathrm{CL}}{\Delta C}\right\rvert$ fixed, L$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta C}\right\rvert$ fixed C$\uparrow \Rightarrow Q\uparrow$, $M\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right\rvert$ fixed, L$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right\rvert$ fixed	C$\uparrow \Rightarrow TC\uparrow$, $M\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta C}\right\rvert$ fixed, L$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta C}\right\rvert$ fixed C$\uparrow \Rightarrow Q\downarrow$, $L\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right\rvert$ fixed, M$\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right\rvert$ fixed
M	M$\uparrow \Rightarrow TC\downarrow$, $C\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta M}\right\rvert \uparrow$, $L\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta M}\right\rvert \uparrow$, M$\uparrow \Rightarrow Q$ fixed, $C\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta M}\right\rvert$ fixed, $L\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta M}\right\rvert$ fixed	M$\uparrow \Rightarrow TC$ fixed, $C\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta M}\right\rvert$ fixed, $L\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta M}\right\rvert$ fxed, M$\uparrow \Rightarrow Q$ fixed, $C\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta M}\right\rvert$ fixed, $L\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta M}\right\rvert$ fixed

در جدول ۳، ازآنجاکه نرخ بهره دریافتنی و نرخ هزینه نگهداری برخلاف هم عمل می‌کنند و نرخ هزینه نگهداری باعث افزایش هزینه‌ها و نرخ بهره دریافتنی باعث کاهش هزینه‌ها می‌شود، مقایسه این‌بار بر اساس نرخ بهره دریافتنی و نرخ هزینه نگهداری صورت می‌گیرد و تأثیر تغییر نرخ بهره دریافتنی (از Ie=0.05 تا Ie=0.4) و همچنین تأثیر نرخ هزینه‌های نگهداری (H=0.05 تا H=0.3) بر هزینه‌های موجودی (TC) بررسی و تحلیل می‌شود.

جدول ۴. هزینه‌های موجودی با تغییر H، Ie، C

		Cs=Cp=C=۲۰ Rs, M=۱۵, L=۳				Cs=Cp=C=۲۰۰ Rs, M=۱۵, L=۳			
H	Ie	۰/۰۵	۰/۱۳	۰/۲۵	۰/٤	۰/۰۵	۰/۱۳	۰/۲۵	۰/٤
۰/۰۵	Q	۱۴۲/۵۹	۱۴۲/۴۴	۱۴۲/۲۲	۱۴۱/۹۴	۴۷/۶۷	۴۷/۲۲	۴۶/۵۲	۴۵/۶۵
	C_L	۵۲۴۷۱/۷۲	۵۲۴۶۴/۶۶	۵۲۴۵۴/۰۶	۵۲۴۴۰/۷۸	۴۸۰۲۵۶/۲۴	۴۸۰۰۴۸/۴۲	۴۷۹۷۳۲/۹۲	۴۷۹۳۳۱/۸۹
۰/۱۲	Q	۱۳۷/۷۵	۱۳۷/۶۱	۱۳۷/۴	۱۳۷/۱۳	۴۶/۰۴	۴۵/۶	۴۴/۹۳	۴۴/۰۸
	C_L	۵۲۷۰۱/۴۳	۵۲۶۹۴/۱۳	۵۲۶۸۳/۱۷	۵۲۶۶۹/۴۴	۴۸۱۰۱۶/۶۳	۴۸۰۸۰۱/۵۲	۴۸۰۴۷۴/۹۳	۴۸۰۰۵۹/۸۲
۰/۲	Q	۱۳۲/۷۹	۱۳۲/۶۵	۱۳۲/۴۵	۱۳۲/۱۹	۴۴/۳۶	۴۳/۹۴	۴۳/۳	۴۲/۴۸
	C_L	۵۲۹۵۴/۶۵	۵۲۹۴۷/۰۸	۵۲۹۳۵/۷۲	۵۲۹۲۱/۴۹	۴۸۱۸۵۴/۸	۴۸۱۶۳۱/۶۴	۴۸۱۲۹۲/۸۴	۴۸۲۸۶۲/۱۹
۰/۳	Q	۱۲۷/۲۸	۱۲۷/۱۵	۱۲۶/۹۵	۱۲۶/۷	۴۲/۵۱	۴۲/۱	۴۱/۴۸	۴۰/۷
	C_L	۵۳۲۵۸/۷۱	۵۳۲۵۰/۸۳	۵۳۲۳۸/۹۸	۵۳۲۲۴/۱۶	۴۸۲۸۶۱/۲۵	۴۸۲۶۲۸/۴۳	۴۸۲۲۷۴/۹۷	۴۸۱۸۲۵/۶۷

با توجه به جدول ۴، با کاهش مقدار I_e مقدار بهینه سفارش‌دهی با شیب ملایمی افزایش می‌یابد؛ اما شیب افزایش مقدار بهینه سفارش‌دهی با افزایش مقدار C کمتر می شود و افزایش مقدار H نیز تأثیر چندانی در شیب افزایش مقدار بهینه سفارش‌دهی ایجاد نمی‌کند.

بدیهی است افزایش مقدار H باعث افزایش هزینه‌های نگهداری و درنتیجه افزایش هزینه کل می‌شود؛ اما شیب تغییر هزینه‌های موجودی نسبت به تغییر مقدار H (افزایش از 0.05 تا 0.3) با افزایش مقدار C بیشتر می شود؛ درواقع شیب تغییر هزینه‌های موجودی نسبت به تغییر H در C=200 بیشتر از شیب تغییر هزینه‌های موجودی نسبت به تغییر H در C=20 است؛ اما افزایش مقدار I_e تأثیر چندانی در افزایش شیب هزینه‌ها با تغییر C ایجاد نمی‌کند.

بدیهی است کاهش مقدار I_e باعث افزایش هزینه‌ها می‌شود؛ اما شیب افزایش هزینه‌ها نسبت به کاهش مقدار I_e با افزایش مقدار C به‌شدت بیشتر می شود؛ به‌نحوی‌که در C=200، شیب افزایش هزینه نسبت به کاهش I_e به‌مراتب بیشتر از حالت C=20 است؛ ولی افزایش مقدار H تأثیر چندانی در افزایش شیب هزینه‌ها با تغییر C ایجاد نمی‌کند.

با افزایش مقدار H مقدار Q کاهش می‌یابد که افزایش مقدار C باعث بیشترشدن تقریبی شیب کاهش مقدار Q می‌شود. در C=200، شیب کاهش مقدار Q نسبت به افزایش مقدار H کمی بیشتر از شیب کاهش مقدار Q نسبت به افزایش مقدار H در C=20 است؛ اما این شیب‌ها در همه حالات I_e برای تغییرات C تقریباً ثابت است و تغییر I_e تأثیر چندانی بر تغییر شیب برای هر یک از حالات C ندارد.

تغییر هزینه‌ها و مقدار سفارش‌دهی با تغییر مقدارهای H، I_e در جدول ۵، نشان داده شده است.

جدول ۵. تحلیل حساسیت پارامترهای H، I_e

	T>M
I_e	$I_e\downarrow \Rightarrow C_L\uparrow,\quad C_p\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta Ie}\right\rvert\uparrow,\ \ H\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta Ie}\right\rvert$ fixed
	$I_e\downarrow \Rightarrow Q\uparrow,\quad C_p\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta Ie}\right\rvert\downarrow,\ \ H\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta Ie}\right\rvert$ fixed
H	$H\uparrow \Rightarrow CL\uparrow,\quad C_p\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta H}\right\rvert\uparrow,\ Ie\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta C_L}{\Delta H}\right\rvert$ fixed
	$H\uparrow \Rightarrow Q\downarrow,\quad C_p\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta H}\right\rvert\uparrow,\quad I_e\uparrow \Rightarrow \left\lvert\frac{\Delta Q}{\Delta H}\right\rvert$ fixed

پیشنهادهای کاربردی و توصیه‌های مدیریتی. طبق نتایج حاصل از اجرای مدل‌ها، همان‌گونه که انتظار می‌رفت، سیاست کنترل موجودی با درنظرگرفتن تأخیر در پرداخت هزینه موجودی کمتری را به خرده‌فروش تحمیل می‌کند؛ چراکه در این حالت خرده‌فروش با درنظرگرفتن هزینه‌های مالی ناشی از موجودی در دستی که بهای آن را پرداخت کرده و موجودی در دستی که مصرف کرده و بهای آن را بر اساس بازه زمانی مجاز هنوز پرداخت نکرده

است، دوره سفارش‌دهی و مقدار سفارش‌دهی را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کند که بیشترین بهره را از سود بهره دریافتی حاصل از بازه مجاز تأخیر در پرداخت دریافت کند. نتایج نشان می‌دهد که با توجه به هزینه‌های سفارش‌دهی بالا و نگهداری پایین، خرده‌فروش ترجیح می‌دهد دوره سفاش‌دهی بیشتر از دوره پرداخت مجاز باشد؛ در صورتی که اگر هزینه‌های سفارش‌دهی پایین و هزینه‌نگهداری نیز به نسبت بیشتر باشد خرده‌فروش به‌دنبال تعداد سفارش‌های بیشتر است تا بیشترین بهره را از بازه مجاز پرداخت حاصل کند.

در بُعد کلان نیز با توجه به محیط رقابتی امروز و ضریب بالای حضور تازه‌واردها و حضور در عرصه تجارت جهانی و تأکید بر میزان درآمدی که هر محصول می‌تواند برای شرکت داشته باشد؛ بدون مدیریت چرخه عمر محصول و اخذ استراتژی‌های مناسب که می‌تواند به خروج سریع و زودهنگام محصول از سبد محصولات منجر شود، خرده‌فروشان قادر به ادامه فعالیت نخواهند بود؛ بنابراین توصیه می‌شود که خرده‌فروشان با ایجاد مزیت‌های رقابتی به جذب مشتری اقدام کنند. از جمله مهم‌ترین این مزیت‌ها، ارائه کالا با تأخیر در پرداخت است که در این مدل بررسی شد. قیمت‌گذاری‌های متفاوت یک محصول در یک زمان مشخص یا استفاده از استراتژی‌های قیمت‌گذاری‌های متفاوت در هر مرحله از عمر محصول یا استفاده از کانال‌های توزیع گوناگون برای یک محصول، تأثیر مستقیمی در شکل نمودار چرخه عمر آن محصول دارد که توصیه می‌شود در پژوهش‌های آتی بررسی شوند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش یک مدل کنترل موجودی برای کالاهای منسوخ‌شدنی، تحت سیاست پرداخت معوقه و در شرایط تورمی توسعه داده شد. درنظرگرفتن تأخیر در پرداخت ارائه‌شده از طرف خرده‌فروش به مشتریان، موجب می‌شود که مشتریان تمایل به سفارش مقادیر بیشتری از کالا داشته باشند. این امر باعث می‌شود که تعداد کالای بیشتری به فروش برسد و تعداد کالای منسوخ شده کاهش یابد و درنتیجه با کاهش ریسک منسوخ‌شدن کالا، هزینه‌های منسوخ‌شدن موجودی کاهش و درآمد خرده‌فروش افزایش یابد. درنظرگرفتن شرایط تورمی و کم‌ارزش‌شدن پول در دوره‌های آتی بر میزان سفارش بهینه در هر دوره تأثیر می‌گذارد که در راستای درنظرگرفتن شرایط واقعی، این موضوع در این مدل لحاظ شده است. بر اساس مدل ارائه‌شده، در دو حالت که دوره بهینه سفارش‌دهی بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از زمان پرداخت مجاز باشد، محدب‌پذیری مدل با درنظرگرفتن لم‌ها و نتایج متعدد اثبات شده و الگوریتمی نیز برای حل مدل ارائه شد.

نتایج مثال عددی نشان می‌دهد که با کاهش میانگین زمان منسوخ‌شدن کالا مقدار سفارش خرده‌فروش کاهش می‌یابد و هزینه‌های موجودی هر دوره را افزایش می‌دهد؛ زیرا با کاهش دوره منسوخ‌شدن کالا، ریسک منسوخ‌شدن افزایش می‌یابد و خرده‌فروش برای مقابله با ریسک، مقدار موجودی کمتری را سفارش می‌دهد؛ همچنین افزایش دوره پرداخت باعث افزایش مقدار سفارش بهینه و کاهش هزینه‌های موجودی خرده‌فروش می‌شود.

این پژوهش به چندین روش قابلیت توسعه دارد. با توجه به اینکه تقاضا تابع عوامل متعددی است و تعیین آن به‌صورت قطعی امکان‌پذیر نیست، درنظرگرفتن تقاضا به‌صورت تابعی خطی یا غیرخطی وابسته به قیمت و زمان (بر اساس چرخه عمر محصولات)، موضوع مناسبی برای پژوهش‌های آتی به‌شمار می‌رود؛ همچنین زمان پرداخت مجاز به‌صورت یک زمان ثابت در مدل لحاظ شده است؛ ولی این زمان می‌تواند بر اساس مقدار سفارش تأمین‌کننده تغییر پیدا کند. درنظرگرفتن یک زنجیره تأمین چندسطحی با چندین خرده‌فروش، درنظرگرفتن کمبود، درنظرگرفتن تخفیفات تعدادی و ریالی و قیمت‌گذاری محصولات منسوخ‌شدنی از دیگر موضوعاتی است که برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

منابع

1. Arcelus, F. J., Pakkala, T. P. M. & Srinivasan, G. (2002). A myopic policy for the gradual obsolescence problem with price-dependent demand. *Computers & Operations research, 29*, 1115-1127.

2. Chang, H.J. & Dye, C.Y. (2001). An Inventory Model for Deteriorating Items with Partial Backlogging and Permissible Delay in Payments. *Journal of Systems Science, 32*, 345-352.

3. Cobbaert, K., & Oudheusden, D. V. (1996). Inventory models for fast moving spare parts subject to "sudden death" obsolescence. *International Jurnal of Production Economics, 44*, 239- 248.

4. Delft, C. V. & Vial, J. P. (1996). Discounted costs, obsolescence and planned stock outs with the EOQ formula. *International Jurnal of Production Economics, 44*, 255-265.

5. Huang, Y. F. (2003). Optimal Retailer's ordering Policies in the EOQ Model under Trade Credit Financing. *Journal of Operational Research Society, 54*, 1011-1015.

6. Jamal, A., Sarker, B., & Wang, S. (1997). An Ordering Policy for Deteriorating Items with Allowable Shortage and Permissible Delay in Payment. *Journal of Operational Research Society, 48*, 826-833.

7. Jilan Boroujeni, A., & Amoozad Mahdiraji, H. (2015). Modeling Inventory Policies in Multi Echelon Supply Chains by Bayesian Networks, *Journal of Industrial Management Perspective, 15*, 61-84 (In Persian).

8. Joglekar, P., & Lee, P. (1993). An exact formulation of inventory costs and optimal lot size in face of sudden obsolescence. *Operations Research Letters, 14*, 283-290.

9. Joglekar, P. & Lee, P. (1996). A profit-maximization model for a retailer's stocking decision on products subject to sudden obsolescence. *Production and operations Management, 5(3),* 288-294.

10. Khouja, M., & Goyal, S. (2006). Single item optimal lot sizing under continuous unit cost decrease. *International Jurnal of Production Economics, 102*, 87-94.

11. Kumar, N., Singh, S.R. & Tomar, J. (2013). Two-warehouse Inventory Model with Multivariate Demand and K-release Rule. *Procedia Technology, 10*, 788-796.

12. Motallebi, S., & Zandieh, M. (2017). Determination of Inventory Management Policies in Process Manufacturing Using Discrete Event Simulation, *Journal of Industrial Management Perspective, 26,* 83-108, (In Persian).

13. Moussawi-Haidar, L., Dbouk, W., Jaber, M. Y. & Osman, I. H. (2014). Coordinating a three-level supply chain with delay in payments and a discounted interest rate. *Computers & Industrial Engineering, 69*, 29-42.

14. Muniappan, P., Uthayakumar, R. & Ganesh, S. (2015). An EOQ model for deteriorating items with inflation and time value of money considering time dependent deteriorating rate and delay payments. *Systems Science & Control Engineering, 3(1),* 427-434.

15. Ouyang, L.Y., Wu, K. S., & Yang, C. T. (2006). A Study on an Inventory Model for Non-Instantaneous Deteriorating Items with Permissible Delay in Payments. *Computers & Industrial Engineering, 51*, 637-651.

16. Palanivel, M., & Uthayakumar, R. (2015). Two-warehouse inventory model for non-instantaneous deteriorating items with optimal credit period and partial backlogging under inflation. *Journal of Control and Decision, 3(2),* 132-150.

17. Pareek, S., & Dhaka, V. (2015). Fuzzy EOQ models for deterioration items under discounted cash flow approach when supplier credits are linked to order quantity. *International Journal of Logistics Systems and Management, 20(1),* 24-41.

18. Persona, A., Grassi, A. & Catena, M. (2005). Consignment stock of inventories in the presence of obsolescence. *International Journal of Production Research, 43*, 4969-4988.

19. Pourmohammad Zia, N. & Taleizadeh, A. A. (2016). A lot-sizing model with backordering under hybrid linked-to-order multiple advance payments and delayed payment. *Transportation Research Part E, 82*, 19-37.

20. Rabieh M., Azar A., Modarres Yazdi M., & Fetanat Fard Haghighi M. (2011). Designing a multi-objective robust multi-sourcing mathematical model, an approach for reducing the risk of supply chain (Case study: Supply Chain of IranKhodro Company). *Journal of Industrial Management Perspective, 1*, 57-77 (In Persian).

21. Song, Y. & Lau, H.C. (2004). A periodic-review inventory model with application to the continuous-review obsolescence problem. *European Journal of Operational Research, 159*, 110-120.

22. Soni, H., Shah, N. H., & Jaggi, C. K. (2010). Inventory models and trade credit, A review. *Control and Cybernetics, 39*, 867-880.

23. Taleizadeh, A. A., & Nematollahi, M. (2014). An inventory control problem for deteriorating items with back-ordering and financial considerations. *Applied Mathematical Modelling, 38(1),* 93-109.

24. Vandana, B. K. (2016). An EOQ model for retailer’s partial permissible delay in payment linked to order quantity with shortages. *Mathematics and Computers in Simulation, 125*, 99-112.

25. Wang, K. H. & Tung, C. T. (2011). Construction of a model towards EOQ and pricing strategy for gradually obsolescent products. *Applied Mathematics and Computation, 217*, 6926-6933.

26. Yadav, D., Singh, S. R. & Kumari, R. (2013). Retailer's optimal policy under inflation in fuzzy environment with trade credit. *International Journal of Systems Science, 46(4)*, 754-762.

27. Yang, S. H., Lee, C. H., & Zhang, A. (2013). An Inventory Model for Perishable Products with Stock-Dependent Demand and Trade Credit under Inflation. *Mathematical Problems in Engineering, 201(1)*, 1-9.

28. Yu, J., Mungan, D., & Sarker, B. R. (2011). An integrated multi-stage supply chain inventory model under an infinite planning horizon and continuous price decrease. *Computers & Industrial Engineering, 61*, 118-130.

29. Zahran, S. K., Jaber, M. Y., & Zanoni, S. (2016). The consignment stock case for a vendor and a buyer with permissible delay in-payment. *Computers & Industrial Engineering, 98*, 333-349.

پیوست الف

برای محاسبه مشتق‌پذیری، مجدداً تابع هدف را در حالت اول در نظر می‌گیریم.

$$C_c = A + Q * C_p + (H\,L\,C_p + C_s) * (Q - D\,L(1 - e^{-\frac{Q}{D*L}})) + C_p I_P (\frac{DM^2}{2} - MQ + \frac{Q^2}{2D}) - C_p I_e\, D(L - e^{-\frac{M}{L}}(L + M)) \quad (A1)$$

به‌صورت خلاصه، فرض کنید داشته باشیم:

$$K_1 = A + C_p I_e \frac{DM^2}{2} - (H\,L\,C_p + C_s) D\,L - C_p\, I_e\; D(L - e^{-\frac{M}{L}}(L + M)) \quad (A2)$$

$$K_2 = H\,L\,C_p + C_s - M\, C_p\, I_p + C_p = C_p(H * L + 1 - M\; I_p) + C_s \quad (A3)$$

$$K_3 = (H\,L\,C_p + C_s) D\,L \quad (A4)$$

$$K_4 = \frac{C_p\, I_p}{2D} \quad (A5)$$

بنابراین هزینه‌های موجودی عبارت‌اند از:

$$C_L = \frac{(K_1 + K_2 Q + K_3 e^{-\frac{Q}{D*L}} + K_4 Q^2)}{(1 - e^{-\frac{Q}{DL}} * e^{-R\frac{Q}{D}})} \quad (A6)$$

حال با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial C_L}{\partial Q} = -\frac{(1 + LR) e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}} (K_1 + K_3 e^{-\frac{Q}{DL}} + K_2 Q + K_4 Q^2)}{D\,L\,(1 - e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^2} + \frac{K_2 + 2K_4 Q - \frac{K_3 e^{-\frac{Q}{DL}}}{DL}}{1 - e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}} \quad (A7)$$

بر این اساس، مشتق دوم برابر خواهد شد با:

$$\frac{\partial^2 C_L}{\partial Q^2} = -\frac{(1+LR)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\left(K_2 + 2K_4 Q - \frac{K_3 e^{-\frac{Q}{DL}}}{DL}\right)}{D\,L\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^2} + (K_1 + K_3 e^{-\frac{Q}{DL}} + K_2 Q + K_4 Q^2)(\frac{2e^{-\frac{(1+L\,R)Q}{DL}}}{D^2L^2(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^3} + \frac{e^{-\frac{(1+L\,R)Q}{DL}}(1+LR)^2}{D^2L^2(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^2}) + \frac{2K_4 + \frac{K_3 e^{-\frac{Q}{DL}}}{D^2L^2}}{1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}} \tag{A8}$$

پس از دسته‌بندی عبارات و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 C_L}{\partial Q^2} = \frac{(K_4 Q)(1+LR)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{DL\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^2} * (\frac{2\,Q\,e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{DL(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})} + \frac{Q}{DL} - 4) + \frac{(K_2)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{DL\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^2} * (\frac{2\,Q\,e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{DL(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})} + \frac{Q}{DL} - 2) + \frac{(K_3)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{D^2L^2\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^2} * (\frac{2\;e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})} + 3) + \frac{2k_4 + \frac{k_3\,e^{-\frac{Q}{DL}}}{D^2L^2}}{1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}} + K_1 * (\frac{2e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{D^2L^2(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^3} + \frac{e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{D^2L^2(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^2}) \tag{A9}$$

به‌منظور تحلیل عبارت حاصل از مشتق دوم باید توجه داشت که K_3 و K_4 مثبت است. ازآنجاکه $M<L$ و $h \cong I_p$ است، می‌توان نتیجه گرفت که K_2 نیز مثبت می‌باشد؛ اما در مورد عبارت K_1 نمی‌توان به‌طور کامل قضاوت کرد.

از طرفی، ازآنجاکه مقدار سفارش اقتصادی از مقدار تقاضای طول عمر کمتر است $(Q\leq LD)$ بنابراین $(1-e^{-\frac{Q}{DL}}) > 0$ است.

در جمع بندی می توان نتیجه گرفت که تحت شرایط زیر مشتق دوم مثبت است:

$$A + C_p I_e \frac{DM^2}{2} + C_p\,I_e\;D\,[e^{-\frac{M}{L}}(L+M)] > D\,L\,[(H\,L + I_e)C_p + C_s] \tag{A10}$$

$$\frac{2\,Q\,e^{-\frac{Q}{DL}}}{\mathrm{DL}(1-e^{-\frac{Q}{DL}})} + \frac{Q}{\mathrm{DL}} > 4 \tag{A11}$$

پیوست ب

برای محاسبه مشتق‌پذیری، مجدداً تابع هدف را در حالت دوم در نظر می‌گیریم.

$$C_c = A + Q * C_p + \left(H\,L\,C_p + C_s \right) * \left(Q - D\,L\left(1 - e^{-\frac{Q}{D*L}}\right)\right) - C_p\, I_e\, D\left(L - e^{-\frac{Q}{DL}}\left(L + \frac{Q}{D}\right)\right) - C_p\, I_e\, Q\left[\left(-e^{-\frac{M}{L}}\left(L + M - \frac{Q}{D}\right) + L\, e^{-\frac{Q}{DL}}\right)\right] \qquad \text{(B1)}$$

به‌صورت خلاصه فرض کنید داشته باشیم:

$$K_5 = A - C_p\, I_e\, DL - (HLC_p + C_s)DL \qquad \text{(B2)}$$

$$K_6 = H\,L\,C_p + C_s - C_p\, I_e\left(e^{-\frac{M}{L}}(L + M)\right) + C_p \qquad \text{(B3)}$$

$$K_7 = \left(HLC_p + C_s\right) D\,L + C_p\, I_e\, D\, L \qquad \text{(B4)}$$

$$K8 = C_p\, I_e - C_p\, I_e\, L \qquad \text{(B5)}$$

$$K_9 = -\frac{C_p\, I_e}{D} e^{-\frac{M}{L}} \qquad \text{(B6)}$$

بنابراین کل هزینه‌های موجودی عبارت است از:

$$C_L = \frac{K5 + K6\, Q + K7\; e^{-\frac{Q}{DL}} + K8\; Q\; e^{-\frac{Q}{DL}} + K9\; Q^2}{(1 - e^{-\frac{Q}{DL}} * e^{-R\frac{Q}{D}})} \qquad \text{(B7)}$$

حال مشتق اول و دوم را برای این تابع هدف محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial CL}{\partial Q} = -\frac{(1 + LR)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}(K_5 + K_6 Q + K_7\, e^{-\frac{Q}{DL}} + K_8\, Q\, e^{-\frac{Q}{DL}} + K_9\, Q^2)}{D\,L(1 - e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^2} + \frac{K_6 + K_8\, e^{-\frac{Q}{DL}} + 2\, K_9\, Q - \frac{K_7\, e^{-\frac{Q}{DL}}}{D\,L} - \frac{K_8\, Q\, e^{-\frac{Q}{DL}}}{D\,L}}{1 - e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}} \qquad \text{(B8)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CL}}{\partial \mathrm{Q}^2} = -\frac{2e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}(1+LR)\left(K_6 + K_8 e^{-\frac{Q}{DL}} + 2\,K_9 Q - \frac{K_7\, e^{-\frac{Q}{DL}}}{D\,L} - \frac{K_8\,\mathrm{Q}\, e^{-\frac{Q}{DL}}}{D\,L}\right)}{D\,L\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^2} + \left(K_5 + K_6\mathrm{Q} + K_7\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{DL}}} + K_8\,\mathrm{Q}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{DL}}} + K_9\,\mathrm{Q}^2\right)\left[\frac{2e^{-\frac{2(1+LR)Q}{DL}}(1+LR)^2}{D^2L^2\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^3} + \frac{e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}(1+LR)^2}{D^2L^2\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^2}\right] + \frac{2\,K_9 - \frac{2\,K_8 e^{-\frac{Q}{DL}}}{DL} + \frac{K_7\, e^{-\frac{Q}{DL}}}{D^2L^2} + \frac{K_8\,\mathrm{Q}\, e^{-\frac{Q}{DL}}}{D^2L^2}}{1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}} \qquad \text{(B9)}$$

با دسته بندی و ساده سازی رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CL}}{\partial \mathrm{Q}^2} = \frac{(K_6)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}(1+LR)}{\mathrm{D\,L}\,(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^2}\left[\frac{2\,\mathrm{Q}\,e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{\mathrm{D\,L}\,(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}} - 2\right] + \frac{(K_8)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}(1+LR)}{\mathrm{D\,L}\,(11-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})^2}\left[\frac{2\,\mathrm{Q}\,e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{\mathrm{D\,L}\,(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})} + \frac{3\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}} - 2 - \frac{2(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}}} + \frac{\mathrm{Q}(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}{\mathrm{D\,L\,e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}}}\right] + \frac{(K_9\,\mathrm{Q})e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}(1+LR)}{\mathrm{D\,L}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}})^2}\left[\frac{2\,\mathrm{Q}\,e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{\mathrm{D\,L}(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}} - 4 + \frac{2\mathrm{D\,L}(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}{\mathrm{Q\,e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}}}\right] + \frac{(K_7)e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}(1+LR)}{\mathrm{D}^2\,\mathrm{L}^2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}}\right)^2} * \left[\frac{2\;e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)} + 3 + \frac{\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)}{\mathrm{Q\,e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{DL}}}}\right] + (K_5)\left[\frac{2\mathrm{e}^{e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}}{\mathrm{D}^2\mathrm{L}^2\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^3} + \frac{e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{\mathrm{D}^2\mathrm{L}^2\left(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}\right)^2}\right] \qquad \text{(B10)}$$

جهت تحلیل رابطه فوق باید توجه داشت که K_8 و K_9 منفی می‌باشند ولی K7 مثبت است و از آنجا که $H>I_e$ و $L<<M$ (که در بسیاری از موارد اتفاق می‌افتد) همچنین K_6 نیز تحت شرایط زیر مثبت است:

$$\frac{Ln(L+M)-Ln(L)}{M} \cong \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{L}{L+M} \cong e^{-\frac{M}{L}} \Rightarrow H\;L\;C_p + C_s > \;C_p\;I_e\;\;\left[e^{-\frac{M}{L}}(L+M)\right] \qquad \text{(B11)}$$

با توجه به تجزیه‌وتحلیل‌های بالا در رابطه مشتق دوم (B10)، نمی‌توان در مورد این رابطه به‌طور

کلی قضاوت کرد و تنها می‌توان گفت که مشتق دوم تنها در صورتی که روابط زیر برقرار شوند، مثبت است:

$$\frac{2\,\mathrm{Q}e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{\mathrm{D\,L}\,(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}\geq 2 \tag{B12}$$

$$\frac{2\,\mathrm{Q}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}}}{\mathrm{D\,L}\,(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}+\frac{3\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}+\frac{\mathrm{Q}(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}{\mathrm{D\,L}e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}\;\leq\;2+\frac{2(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}{e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}} \tag{B13}$$

$$\frac{2\,\mathrm{Q}\,e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}{\mathrm{D\,L}(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D\,L}}+\frac{2\mathrm{D\,L}(1-e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}})}{\mathrm{Q}\,e^{-\frac{(1+LR)Q}{DL}}}\leq 4 \tag{B14}$$

$$A\geq[(H\,L+I_e\,)\,C_p\,+C_s]\,D\,L \tag{B15}$$